القسم الأدبي

الرياضيات
العامة

الصف الثانى الثانوى

كتاب الطالب

الفصل الدراسي الأول

SAKKARA
PUBLISHING

مكتبة مستر الرياضيات في مصر

تأليف

أ/ كمال يونس كبشة

أ.د/ عفاف أبو الفتوح صالح

أ/ سيرافيم إلياس إسكندر

أ/مجدى عبد الفتاح الصفتى

أ/ أسامة جابر عبد الحافظ

جميع الحقوق محفوظة لا يجور نشر أى جزء من هذا الكتاب أو تصويره أو تخزينه أو تسجيله بأى وسيلة دون موافقة خطية من الناشر.

شركة سقارة للنشر
ش.م.م

SAKKARA
PUBLISHING

الطبعة الأولى ٢٠١٦/٢٠١٥
رقم الإيداع ١٠٥٥٥ / ٢٠١٥
الرقم الدولى 978 - 977 - 706 - 012 - 7

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التى تم فى ضوئها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيمايلى:

١ تنمية وحدة المعرفة وتكاملها فى الرياضيات، ودمج المفاهيم والترابط بين كل مجالات الرياضيات المدرسية.

٢ تزويد المتعلم بما هو وظيفى من معلومات ومفاهيم وخطط لحل المشكلات.

٣ تبنّى مدخل المعايير القومية للتعليم فى مصر والمستويات التعليمية وذلك من خلال:

أ) تحديد ما ينبغى على المتعلم أن يتعلمه ولماذا يتعلمه.

ب) تحديد مخرجات التعلم بدقة، وقد ركزت على مايلى:

أن يظل تعلم الرياضيات هدف يسعى المتعلم لتحقيقه طوال حياته - أن يكون المتعلم محبًّا للرياضيات ومبادرًا بدراستها - أن يكون المتعلم قادرًا على العمل منفردًا أو ضمن فريق - أن يكون المتعلم نشطًا ومثابرًا ومواظبًا ومبتكرًا - أن يكون المتعلم قادرًا على التواصل بلغة الرياضيات.

٤ اقتراح أساليب وطرق للتدريس وذلك من خلال كتاب (دليل المعلم).

٥ اقتراح أنشطة متنوعة تتناسب مع المحتوى ليختار المتعلم النشاط الملائم له.

٦ احترام الرياضيات واحترام المساهمات الإنسانية منها على مستوى العالم والأمة والوطن، وتعرف مساهمات وإنجازات العلماء المسلمين والعرب والأجانب.

وفى ضوء ما سبق روعى فى هذا الكتاب ما يلى:

★ يتضمن الكتاب ثلاثة مجالات هى: الجبر والعلاقات والدوال، الحُسبان (التفاضل والتكامل)، حساب المثلثات، وتم تقسيم الكتاب إلى وحدات متكاملة ومترابطة لكل منها مقدمة توضح مخرجات التعلم المستهدفة ومخطط تنظيمى لها والمصطلحات الواردة بها باللغة العربية والإنجليزية، ومقسمة إلى دروس يوضح الهدف من تدريسها للطالب تحت عنوان سوف تتعلم، ويبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس وروعى عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب ويتضمن مجموعة من الأنشطة التى تتناول الربط بالمواد الأخرى والحياة العملية والتى تناسب القدرات المختلفة للطلاب وتراعى الفروق الفردية من خلال بند اكتشف الخطأ لمعالجة بعض الأخطاء الشائعة لدى الطلاب وتؤكد على العمل التعاونى، وتتكامل مع الموضوع كما يتضمن الكتاب بعض القضايا المرتبطة بالبيئة المحيطة وكيفية معالجتها.

★ كما قدم فى كل درس أمثلة تبدأ من السهل إلى الصعب، وتشمل مستويات تفكير متنوعة، مع تدريبات عليها تحت عنوان حاول أن تحل وينتهى كل درس ببند «تمارين» وتشمل مسائل متنوعة تتناول المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في الدرس.

★ تنتهى كل وحدة بملخص للوحدة يتناول المفاهيم والتعليمات الواردة بالوحدة وتمارين عامة تشمل مسائل متنوعة على المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في هذه الوحدة.

★ تُختم وحدات الكتاب باختبار تراكمى يقيس بعض المهارات الازمة لتحقيق مخرجات تعلم الوحدة.

★ ينتهي الكتاب بإختبارات عامة تشمل بعض المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب خلال الفصل الدراسى.

وأخيرًا ..نتمنى أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولمصرنا العزيزة.

والله من وراء القصد، وهو يهدى إلى سواء السبيل

المحتويات

الوحدة الأولى: الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

١ - ١ الدوال الحقيقية ٤
١ - ٢ اطراد الدوال ١٣
١ - ٣ الدوال الزوجية والدوال الفردية ١٨
١ - ٤ التمثيل البياني للدوال والتحويلات الهندسية ٢٥
١ - ٥ حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة ٤٠
ملخص الوحدة ٤٧
تمارين عامة ٤٩
اختبار تراكمي ٥١

الوحدة الثانية: الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

٢ - ١ الأسس الكسرية ٥٤
٢ - ٢ الدالة الآسية وتطبيقاتها ٦٢
٢ - ٣ حل المعادلات الأسية ٦٦
٢ - ٤ الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البياني ٧١
٢ - ٥ بعض خواص اللوغاريتمات ٧٦
ملخص الوحدة ٨٣
تمارين عامة ٨٥
اختبار تراكمي ٨٧

المحتويات

الوحدة الثالثة: النهايات

٣ - ١ مقدمة فى النهايات ٩٠
٣ - ٢ إيجاد نهاية الدالة جبريًّا ٩٦
٣ - ٣ نهاية الدالة عند اللا نهاية ١٠٣
ملخص الوحدة ١٠٩
تمارين عامة ١١٠
اختبار تراكمى ١١١

الوحدة الرابعة: حساب المثلثات

٤ - ١ قانون (قاعدة) الجيب ١١٤
٤ - ٢ قانون (قاعدة) جيب التمام ١٢٥
ملخص الوحدة ١٣٦
تمارين عامة ١٣٧
اختبار تراكمى ١٣٩

اختبارات عامة وإجابات

اختبارات عامة ١٤١
إجابات بعض التمارين ١٥٥

الوحدة الأولى

الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

Real Functions and Drawing Curves

مقدمة الوحدة

للدوال أنواع مختلفة وتطبيقات هامة فى مختلف مجالات الحياة، فى علم الفلك والطب والاقتصاد، وعلم الزلازل والجيولوجيا والديموغرافيا ، فنستخدم الدوال فى احتساب متغيرات الطقس والتنبؤ بالطقس المتوقع لفترة مقبلة، أو تحديد موضع خلل فى عمل القلب باستخدام الرسوم البيانية التى يسجلها رسام القلب الكهربائى، أو تحقيق أفضل ربح بدراسة دالتى الربح والتكاليف، أو تأثير فئات العمر على تعداد السكان . كما تستخدم أيضًا فى الطب الرياضى لتحديد الوزن الأمثل [الوزن = الطول (سم) - ١٠٠] أو قياس نسبة الدهون فى الجسم ، ويكثر استخدامها فى الصناعة لدراسة تأثير المتغيرات المختلفة على جودة الانتاج.

ويعد ليوناردو أويلر *Leonhard Euler* (١٧٠٧م - ١٧٨٣م) السويسرى الأصل من أبرز علماء القرن الثامن عشر فى الرياضيات والفيزياء، وينسب له استخدام الرمز ($y=f(x)$) أو ص = د(س) للدلالة على الدالة معتبرا أن الدالة ارتباط بين عناصر مجموعتين بعلاقة تسمح بحساب قيمة متغير تابع ص لآخر مستقل س ، كما حول جميع النسب المثلثية التى نوه بها المصريون القدماء والبابليون وبرع فيها العرب إلى دوال مثلثية. فى هذه الوحدة ستعرف صورًا مختلفة من الدوال الحقيقية وسلوكها وتمثيلها بيانيًّا مستخدمًا التحويلات الهندسية والبرامج الرسومية واستخدام الدوال الحقيقية فى حل مشكلات رياضية وحياتية فى مجالات مختلفة.

مخرجات تعلم الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة ، وتنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن:

- يتعرف مفهوم الدالة الحقيقية.
- يحدد مجال الدوال الحقيقية، والمجال المقابل والمدى لها.
- يستنتج إطراد الدوال الحقيقية (تزايد الدوال - تناقص الدوال - ثبوت الدوال).
- يحدد نوع الدوال الحقيقية من حيث كونها زوجية أو فردية
- يتعرف الدوال كثيرات الحدود.
- يرسم منحنيات الدوال [الدالة التربيعية - دالة المقياس - الدالة التكعيبية - الدالة الكسرية ويستنتج خواص كل منها.
- يستنتج تأثير كل من التحويلات:
  د(س ± أ)± ب، أ د (س±ب) ± جـ على الدوال السابقة.
- يطبق التحويلات السابقة على رسم منحنيات الدوال الحقيقية.
- يحل معادلات على الصورة:
  |أ س + ب| = جـ، |أ س + ب| = |ى س + ج|
- يحل متباينات على الصورة:
  |أ س + ب| < ج ، |أ س + ب| ≤ ج ،
  |أ س + ب| > ج ، |أ س + ب| ≥ ج
- يستخدم الدوال الحقيقية فى حل مشكلات رياضية وحياتية فى مجالات مختلفة.
- يربط بين ما درسه من تأثير التحويلات السابقة على الدوال المثلثية فى صورة نشاط.
- يبحث عن التمثيل البيانى للدوال الحقيقية السابق دراستها، وتأثير التحويلات السابقة باستخدام برنامج الجيوجيبرا "geogebra" كنشاط وعمل جماعي.

المصطلحات الأساسية

دالة حقيقية	Real Function
مجال	Domain
مجال مقابل	Co–domain
مدى	Range
خط رأسي	Vertical Line
دالة متعددة التعريف	Piecewise–Defind Function
دالة زوجية	Even Function
دالة فردية	Odd Function
إطراد دالة	Monotony of a Function
دالة تزايدية	Increasing Function
دالة تناقصية	Decreasing Function
دالة ثابتة	Constant Function
دالة كثيرة الحدود	polynomial Function
دالة مقياس (قيمة مطلقة)	Absolute Value Function
دالة كسرية	Rational Function
خط تقارب	Asymptote
تحويل	Transformation
إزاحة (انتقال)	Translation
انعكاس	Reflection
تمدد	Stretching
حل بياني	Graphical Solution

دروس الوحدة

الدرس (١ - ١): الدوال الحقيقية.

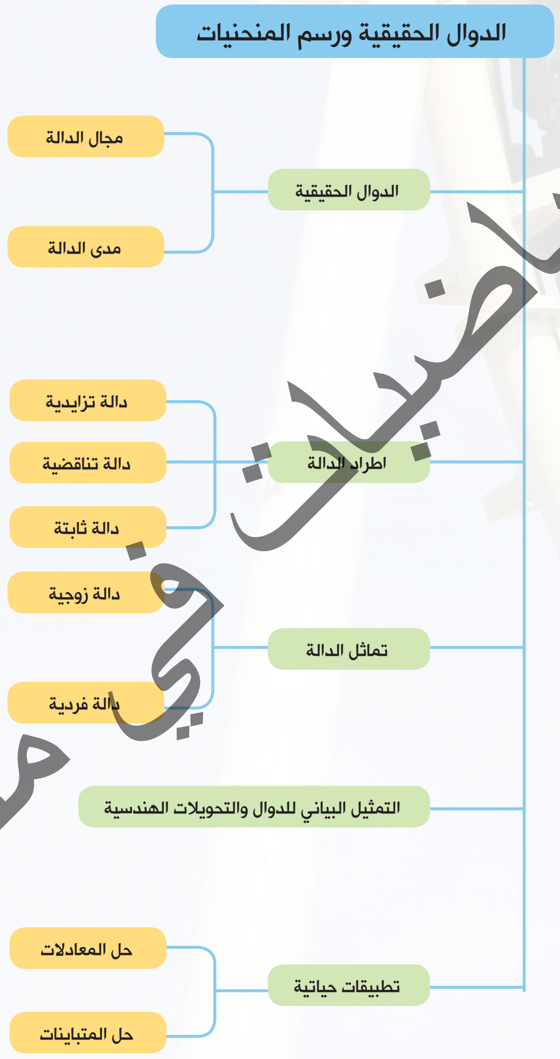
الدرس (١ - ٢): اطراد الدوال.

الدرس (١ - ٣): الدوال الزوجية و الدوال الفردية.

الدرس (١ - ٤): التمثيل البياني للدوال والتحويلات الهندسية.

الدرس (١ - ٥): حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة.

مخطط تنظيمى للوحدة



- الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات
  - الدوال الحقيقية
    - مجال الدالة
    - مدى الدالة
  - اطراد الدالة
    - دالة تزايدية
    - دالة تناقضية
    - دالة ثابتة
  - تماثل الدالة
    - دالة زوجية
    - دالة فردية
  - التمثيل البياني للدوال والتحويلات الهندسية
  - تطبيقات حياتية
    - حل المعادلات
    - حل المتباينات

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة رسومية – حاسب آلى مزود ببرامج رسومية (Graph, GeoGebra)

الوحدة الأولى

١-١ الدوال الحقيقية

Real Functions

سوف تتعلم

- مفهوم الدالة الحقيقية.
- اختبار الخط الرأسى.
- الدالة متعددة التعريف (المعرفة بأكثر من قاعدة).
- تحديد مجال ومدى الدالة الحقيقية.
- العمليات على الدوال.

المصطلحات الأساسية

دالة	Function
مجال	Domain
مجال مقابل	Co-domain
مدى	Range
مخطط سهمى	Arrow Diagram
مخطط بيانى	Cartesian Diagram
خط رأسى	Vertical line
دالة متعددة التعريف	Piecewise Function
قاعدة الدالة	

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب.

استكشف

سبق أن درست مفهوم الدالة، وعلمت بأنها علاقة بين مجموعتين غير خاليتين سـ ، صـ بحيث تحدد لكل عنصر من عناصر سـ عنصرًا وحيداً من عناصر صـ ويرمز للدالة بأحد الرموز: د أو و أو ر أو ....

إذا رمزنا لدالة ما من المجموعة سـ إلى المجموعة صـ بالرمز د فإنها **تكتب رياضيًّا:**

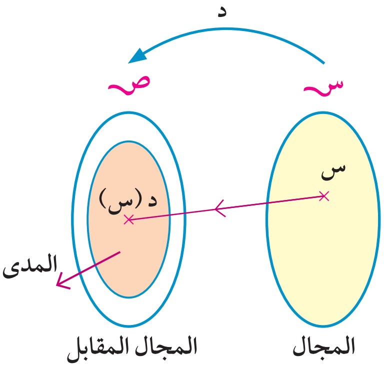
د: سـ ⟵ صـ وتقرأ د دالة من سـ إلى صـ ويلاحظ:

١- لكل عنصر س ∈ سـ يتعين عنصر وحيد ص ∈ صـ بقاعدة الدالة د وتكتب:

ص = د(س)

٢- تسمى المجموعة سـ مجال الدالة ، وتسمى المجموعة صـ المجال المقابل للدالة.

٣- تسمى المجموعة {ص = د(س): س ∈ سـ} مدى الدالة وتعرف بمجموعة صور عناصر مجال الدالة.



تعريف ١

الدالة الحقيقية *Real Function*

تسمى الدالة د دالة حقيقية إذا كان كل من مجالها ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية ع أو مجموعة جزئية منها.

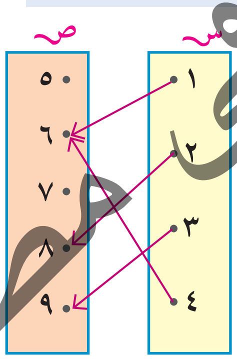
مثال

① العلاقة من المجموعة سـ إلى المجموعة صـ الممثلة في المخطط السهمى المجاور تمثل دالة، حيث:

المجموعة سـ هى مجال الدالة = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}

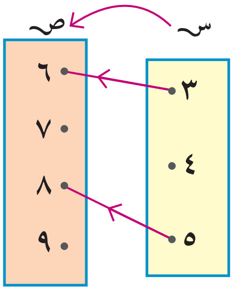
والمجموعة صـ المجال المقابل للدالة = {٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩}

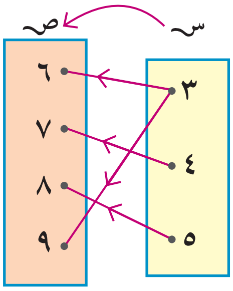
أما مجموعة العناصر {٦ ، ٨ ، ٩} فتعرف بمدى الدالة.

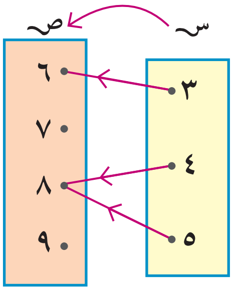


حاول أن تحل

① أى من العلاقات المبينة بالمخططات السهمية الآتية تمثل دالة وأيها لاتمثل دالة، ثم اكتب المجال والمدى فى حال كونها دالة.







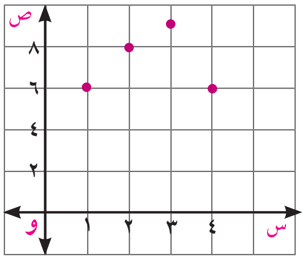
التمثيل البياني للدوال

إذا كانت د : س ⟵ ص فإن مجموعة الأزواج المرتبة التى تحقق قاعدة الدالة تسمى بيان الدالة أى أن:

بيان د = { (س، ص): س ∈ س ، ص∈ ص ، ص = د(س) }

وبتمثيل هذه الأزواج المرتبة في المستوى الديكارتي نرسم الشكل البياني للدالة أو منحنى الدالة

فى مثال (١): بيان د = { (١، ٦)، (٢، ٨)، (٣، ٩)، (٤، ٦) }.



لاحظ أن:

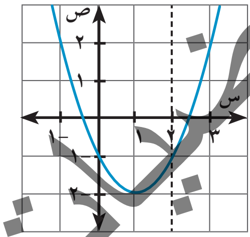
١- الشكل البياني للدالة هو مجموعة من النقط المنفصلة.

٢- الخط الرأسي المار عند كل عنصر من عناصر مجال الدالة يقطع تمثيلها البياني فى نقطة وحيدة.

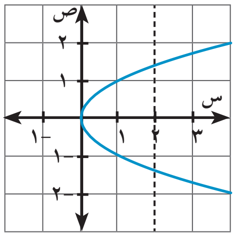
تعلم

اختبار الخط الرأسى

إذا وجد أن الخط الرأسى عند كل عنصر من عناصر المجال يمر بنقطة واحدة فقط من النقط التى تمثل العلاقة؛ كانت العلاقة دالة من س ⟵ ص



دالة



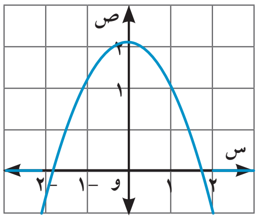
ليست دالة

مثال

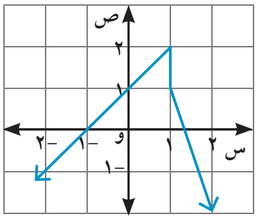
تحديد العلاقات التى تمثل دالة

Identify the relations representing the function

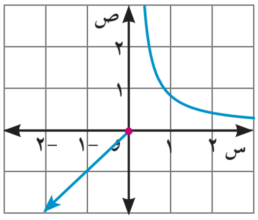
② فى كل شكل من الأشكال الآتية بيِّن ما إذا كانت ص تمثل دالة فى س أم لا.



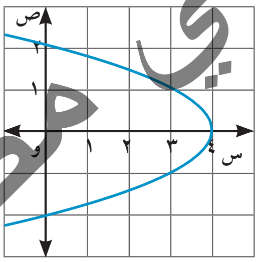
شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)



شكل (٤)

الحل

شكل (١) يمثل دالة

مكتبة مستشار الرياضيات في مصر

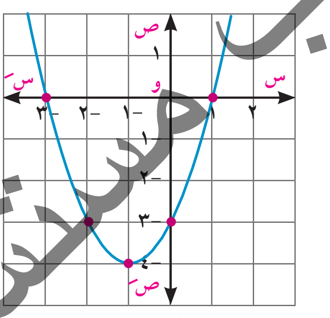
شكل (٢) لا يمثل دالة؛ لأن الخط الرأسى المار بالنقطة (١، ٠) يقطع الشكل البيانى فى عدد غير منته من النقط.

شكل (٣) يمثل دالة.

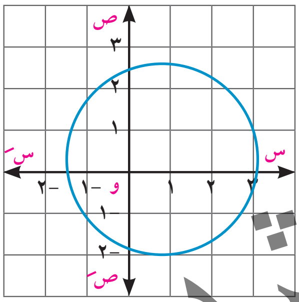
شكل (٤) لا يمثل دالة؛ لأن يوجد خط رأسي يقطع المنحنى فى أكثر من نقطة.

حاول أن تحل

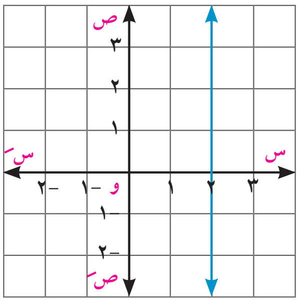
② بين أى الأشكال الآتية تمثل دالة من س ⟵ ص مع ذكر السبب.



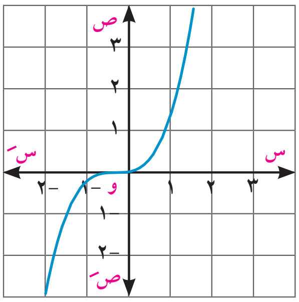
شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)



شكل (٤)

مثال

تحديد مدى الدالة

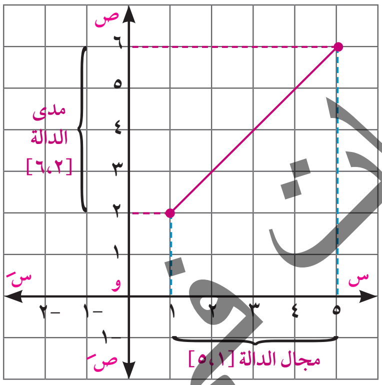
③ **أ** إذا كانت د: [١، ٥] ⟵ ع حيث د(س) = س + ١

ارسم الشكل البيانى للدالة د ، واستنتج من الرسم مدى الدالة.

ب إذا كانت ر: [١، ٥[⟵ ع حيث ر(س) = س + ١

ارسم الشكل البيانى للدالة ر ، واستنتج من الرسم مدى الدالة.

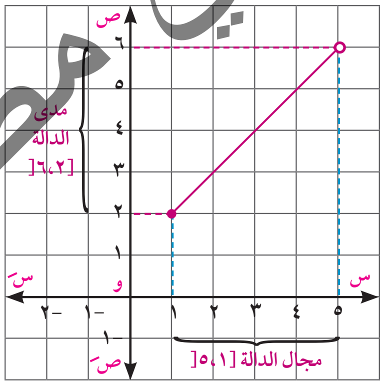
الحل



أ الدالة د دالة خطية مجالها [١، ٥] تمثل بيانيًا بقطعة مستقيمة طرفاها النقطتين (١، د(١)) ، (٥، د(٥)) أى النقطتين (١، ٢)، (٥، ٦).

مدى الدالة د = [٢، ٦]

وهو مجموعة الإحداثيات الصادية لجميع النقط التى تنتمى إلى منحنى الدالة.



ب الدالة ر دالة خطية مجالها [١، ٥[وواضح أن ر(س) = د(س) لكل س ∈ [١، ٥[فتمثل بيانيًا بقطعة مستقيمة إحدى طرفيها النقطة (١، ٢) مع استبعاد النقطة الأخرى (٥، ٦) من الشكل البيانى بوضع دائرة مفرغة عند هذه النقطة.

مدى الدالة ر= [٢، ٦[

حاول أن تحل

③ **أ** إذا كانت د: [١ ، ∞[⟵ ع ، حيث د(س) =١ - س

ارسم الشكل البيانى للدالة د ، واستنتج من الرسم مدى الدالة.

ب إذا كانت ر:]- ∞، -١[⟵ ع، حيث ر(س) = ١ - س

ارسم الشكل البيانى للدالة ر ، واستنتج من الرسم مدى الدالة.

الدالة متعددة التعريف: *Piecewise-Defined Functions*

عمل تعاونى

لترشيد استهلاك الكهرباء والمياه والغاز يتم حساب قيمة الاستهلاك الشهرى منها تبعًا لشرائح خاصة تربط كمية الاستهلاك بقيمته.

الاستهلاك الشهرى (متر مكعب)	السعر بالقروش
حتى ٢٥	٤٠
أكثر ٢٥ حتى ٥٠	١٠٠
أكثر من ٥٠	١٥٠

يبين الجدول المقابل أسعار شرائح الاستهلاك الشهرى من الغاز الطبيعى فى المنازل بالقروش. احسب مع زميل قيمة استهلاك منزل من الغاز الطبيعى بالقروش للكميات التالية:

١ - ٣٠ متر مكعب شهريًا. **٢ -** ٦٠ متر مكعب شهريًا.

[تضاف قيمة الضرائب المستحقة ورسوم تشغيل الخدمة بعد حساب قيمة الاستهلاك الشهرى]

لاحظ: يمكن كتابة دالة د لحساب قيمة استهلاك س مترًا مكعبًا من الغاز شهريًا حيث س∈ ع على النحو التالى:

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \text{٤٠ س} & \text{عندما } \text{٠} \leqslant \text{س} \leqslant \text{٢٥} \\ \text{١٠٠ س - ١٥٠٠} & \text{عندما } \text{٢٥} < \text{س} \leqslant \text{٥٠} \\ \text{١٥٠ س - ٤٠٠٠} & \text{عندما } \text{س} > \text{٥٠} \end{cases}$$

وهى دالة حقيقية متعددة التعريف (معرفة بأكثر من قاعدة)

تعلم

الدالة متعددة التعريف، هي دالة حقيقية يكون لكل مجموعة جزئية من مجالها قاعدة تعريف مختلفة.

حاول أن تحل

④ تحقق باستخدام الدالة السابقة من صحة إجابتك فى عمل تعاونى، ثم احسب قيمة الاستهلاك الشهرى من الغاز للكميات التالية:

أ ١٥ مترًا مكعبًا **ب** ٤٠ مترًا مكعبًا **ج** ٥٤ مترًا مكعبًا

رسم الدالة متعددة التعريف:

مثال

④ إذا كانت

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \text{٣ - س} & \text{عندما } \text{-٢} \leqslant \text{س} < \text{٢} \\ \text{س} & \text{عندما } \text{٢} \leqslant \text{س} \leqslant \text{٥} \end{cases}$$

ارسم الشكل البيانى للدالة واستنتج من الرسم مجال الدالة ومداها.

الحل

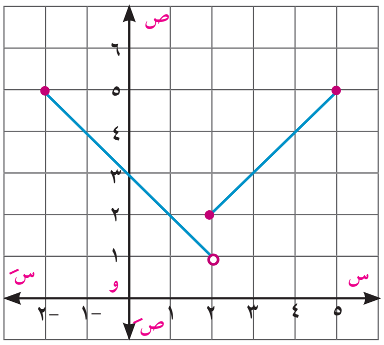
الدالة د معرفة على فترتين وتتعين د(س) بواسطة قاعدتين:

القاعدة الأولى: د$_{1}$(س) = ٣ -س عندما -٢ ≤ س < ٢ أى على الفترة [-٢، ٢[

وهى لدالة خطية تمثل بقطعة مستقيمة طرفاها النقطتين

(-٢، ٥)، (٢، ١) مع وضع دائرة مفرغة عند النقطة (٢، ١)

لأن ٢∌ [-٢، ٢[**كما فى الشكل المقابل.**



القاعدة الثانية : د$_{2}$(س) = س عندما ٢ ≤ س ≤ ٥ **أى** على الفترة [٢، ٥]

وهى لدالة خطية تمثل بقطعة مستقيمة طرفاها النقطتين (٢، ٢)، (٥،٥)

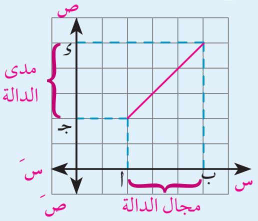
ويكون مجال الدالة د = [-٢، ٢[∪ [٢، ٥]=[-٢، ٥]

من الرسم نستنتج أن:

مجال الدالة د = [-٢، ٥]

مدى الدالة د =]١، ٥]

لاحظ أن



فى الشكل البياني الممثل للدالة د

مجال الدالة = [أ ، ب]

مدى الدالة = [جـ ، ى]

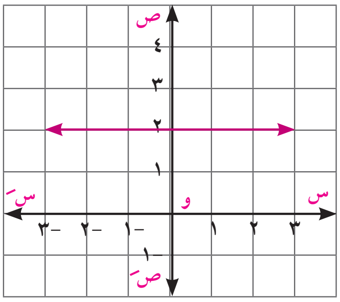
حاول أن تحل

⑤ إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \text{س - ١} & \text{عندما } -٢ \leq \text{س} < ٠ \\ \text{س + ١} & \text{عندما س} \geq ٠ \end{cases}$

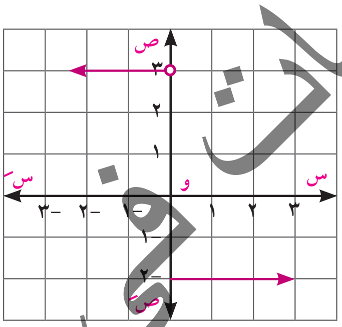
ارسم الشكل البيانى للدالة، واستنتج من الرسم مجال الدالة ومداها.

⑥ فى كل من الأشكال البيانية التالية استنتج مجال ومدى الدالة.

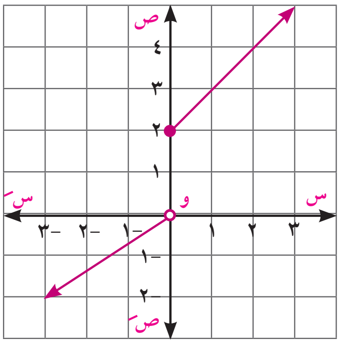
أ



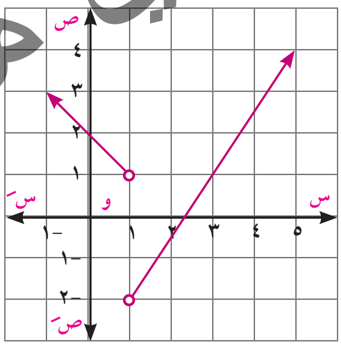
ب



جـ



د



تحديد مجال الدوال الحقيقية والعمليات عليها

Determining the Domain of the Real Functions and Operations on it

يتحدد مجال الدالة من قاعدة تعريفها أو الشكل البياني لها.

تذكر أن

مجال الدالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما لم تكن معرفة على مجموعة جزئية منها.

مثال

تعيين مجال الدالة *Determining Domains*

⑤ حدد مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية:

أ $\text{د}_{١}(\text{س}) = \frac{\text{س} + ٣}{\text{س}^{٢} - ٩}$ ب $\text{د}_{٢}(\text{س}) = \sqrt{\text{س} - ٣}$

جـ $\text{د}_{٣}(\text{س}) = \sqrt[٣]{\text{س} - ٥}$ د $\text{د}_{٤}(\text{س}) = \frac{١}{\sqrt{٣ - \text{س}}}$

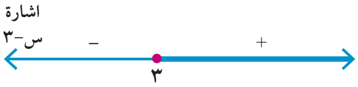
الحل

أ الدالة $\text{د}_{١}$ تكون غير معرفة عندما يكون المقام = ٠ لذلك نضع $\text{س}^{٢} - ٩ = ٠$ أى $\text{س} = \pm ٣$

وعليه يكون مجال الدالة $\text{د}_{١}$ هو ع - {-٣، ٣}

ب مجال الدالة $\text{د}_{٢}$ هو جميع قيم س التى تجعل قيمة ما بداخل الجذر التربيعى موجبًا أو صفرًا ، أى قيم س التى تجعل $\text{س} - ٣ \geqslant ٠$.

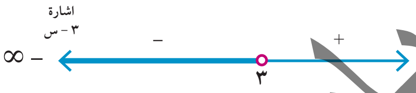
$\because \text{س} - ٣ \geqslant ٠$ $\therefore \text{س} \geqslant ٣$ $\therefore$ مجال $\text{د}_{٢}$ = [٣ ، ∞ [



جـ $\text{د}_{٣}(\text{س}) = \sqrt[٣]{\text{س} - ٦}$ ، دليل الجذر عدد فردى مجال $\text{د}_{٣}$ = ع

د تكون $\text{د}_{٤}$ معرفة عندما يكون $٣ - \text{س} > ٠$.

وعليه فإن مجال $\text{د}_{٤}$ هو]-∞، ٣[



لاحظ:

إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \sqrt[\text{ن}]{\text{ر}(\text{س})}$ حيث $\text{ن} \in \text{ص}^{+}$، $\text{ن} > ١$ ، ر (س) كثيرة حدود

أولا: عندما ن عدد فردى فإن مجال الدالة د = ع

ثانيًا: عندما ن عدد زوجى فإن: مجال الدالة د هو مجموعة قيم س بشرط $\text{ر}(\text{س}) \geqslant ٠$

حاول أن تحل

⑦ حدد مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية:

أ $\text{د}_{١}(\text{س}) = \frac{٢\text{س} + ٣}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٢}$ ب $\text{د}_{٢}(\text{س}) = \sqrt{\text{س} - ٢}$

جـ $\text{د}_{٣}(\text{س}) = \sqrt[٣]{\text{س} - ٥}$ د $\text{د}_{٤}(\text{س}) = \frac{٥}{\sqrt{\text{س} + ٤}}$

تفكير ناقد:

إذا كان مجال الدالة د حيث $\text{د}(\text{س}) = \frac{٢}{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + \text{ك}}$ هو ع -{٣} أوجد قيمة ك.

نشاط

العمليات على الدوال *Operations on Functions*

إذا كانت $د_١$ ، $د_٢$ دالتين مجالاهما $م_١$، $م_٢$ على الترتيب ، فإن:

١ $(د_١ \pm د_٢)(س) = د_١(س) \pm د_٢(س)$ ، مجال $(د_١ \pm د_٢)$ هو $م_١ \cap م_٢$

٢ $(د_١ . د_٢)(س) = د_١(س) . د_٢(س)$ ، مجال $(د_١ . د_٢)$ هو $م_١ \cap م_٢$

٣ $(\frac{د_١}{د_٢})(س) = \frac{د_١(س)}{د_٢(س)}$ حيث $د_٢(س) \neq ٠$ مجال $(\frac{د_١}{د_٢})$ هو $(م_١ \cap م_٢) - ف(د_٢)$

حيث ف $(د_٢)$ مجموعة أصفار $د_٢$

نلاحظ أنه في جميع الحالات السابقة ، مجال الدالة الجديدة يساوى تقاطع مجالى $د_١$، $د_٢$ باستثناء القيم التى تجعل $د_٢(س) = ٠$ فى عملية القسمة.

إذا كان $د_١ : ع \longrightarrow ع$ حيث $د_١(س) = ٣س - ١$

$د_٢ : [-٢، ٣] \longrightarrow ع$ حث $د_٢(س) = س - ٣$

أولاً: أوجد قاعدة ومجال كل من الدوال الآتية:

أ $(د_١ + د_٢)$ ب $(د_١ - د_٢)$ ج $(د_١ . د_٢)$ د $(\frac{د_١}{د_٢})$

ثانيًا: احسب القيمة العددية - إن امكن ذلك - لكل من:

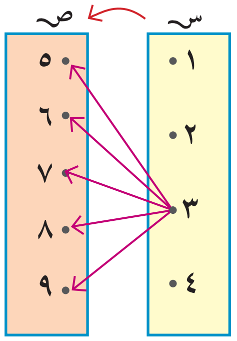
أ $(د_١ + د_٢)(٣)$ ب $(د_١ - د_٢)(-٣)$ ج $(د_١ . د_٢)(-٢)$

د $(د_١ . د_٢)(٢)$ هـ $(\frac{د_١}{د_٢})(٤)$ و $(\frac{د_١}{د_٢})(-١)$

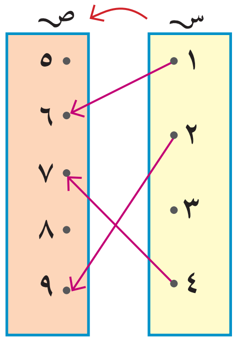
تمارين ١ - ١

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

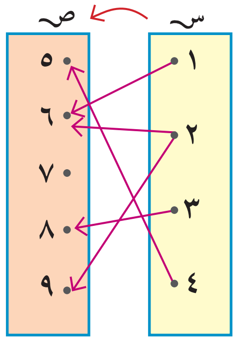
① العلاقة المبينة بالمخططات السهمية التالية، والتى تمثل دالة هى:



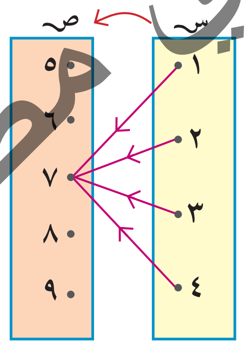
أ



ب

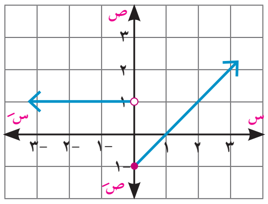


ج

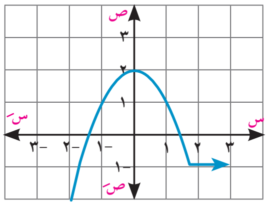


د

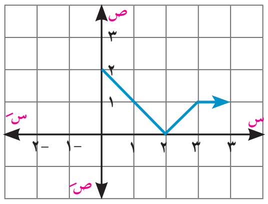
② العلاقة المبينة فى الأشكال البيانية التالية والتى لا تمثل دالة هى:



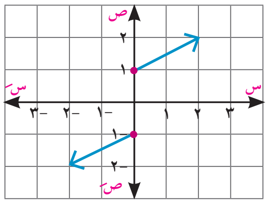
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

③ العلاقة المبينة بمجموعة الأزواج المرتبة والتي لا تمثل دالة هي:

أ {(١، ٣)، (٣، ٥)، (٥، ٧)، (٧، ٩)}
ب {(٢، ٣)، (٣، ٤)، (٢، ١)، (٣، ٥)}
جـ {(٠، ٣)، (١، ٣)، (٢، ٣)، (٣، ٣)}
د {(-٣، ٥)، (-١، ٥)، (٠، ٥)، (٢، ٥)}

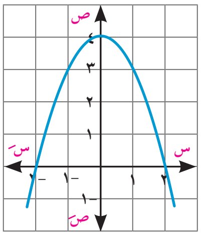
أجب عن مايأتى:

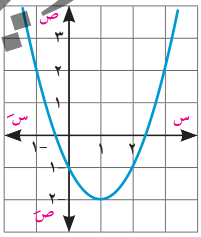
④ إذا كانت د: س ⟵ ع وكان س = {١، ٢، -٢، -٣}
أوجد مدى الدالة إذا كان د(س) = ٥س - ٣

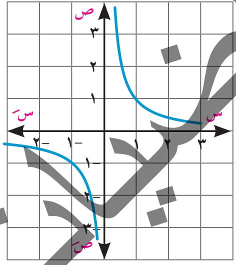
⑤ إذا كانت ر : {١، ٢، ٣، ٤، ٥} ⟵ ص₊ حيث ر(س) = ٤س - ٣

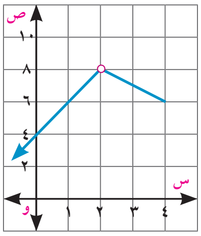
أ اكتب مدى الدالة
ب إذا كانت ر(ك) = ١٧ فإوجد قيمة ك

⑥ استنتج من الشكل البيانى مجال الدالة ومداها فى كل ممايأتى:

أ


ب


جـ


د


⑦ حدد مجال الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} \text{س - ١} & \text{عندما } ٢ < \text{س} \leqslant ٤ \\ \text{-١} & \text{عندما } -٢ \leqslant \text{س} \leqslant ٢ \end{cases}$

ثم ارسم الشكل البيانى للدالة ، ومن الرسم استنتج مدى الدالة.

⑧ ارسم الشكل البياني للدالة د حيث:

د(س) = $\begin{cases} \text{س + ٣} & \text{عندما س} \geqslant ٢ \\ \text{٢س - ١} & \text{عندما س} < ٢ \end{cases}$ ومن الرسم استنتج مدى الدالة.

⑨ إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \text{٢س + ٣} & \text{عندما } -٢ \leqslant \text{س} < ٠ \\ \text{١ - س} & \text{عندما } ٠ \leqslant \text{س} \leqslant ٤ \end{cases}$

ارسم الشكل البيانى للدالة د، ومن الرسم استنتج مدى الدالة

١٠ إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \text{س} + ١ & \text{عندما } -٣ \leqslant \text{س} < ٠ \\ \text{س} + ٢ & \text{عندما } ٠ \leqslant \text{س} \leqslant ٣ \end{cases}$

ارسم الشكل البيانى للدالة د، ومن الرسم استنتج مدى الدالة

١١ إذا كان: د(س) = $\begin{cases} -٤\text{س} + ٣ & \text{عندما س} < ٣ \\ -\text{س}^{٣} & \text{عندما } ٣ \leqslant \text{س} \leqslant ٨ \\ ٣\text{س}^{٢} + ١ & \text{عندما س} > ٨ \end{cases}$

أوجد:

أ د(٢)　　ب د(٣)　　جـ د(١٠)

١٢ الربط بالتجارة: تمثل الدالة د ، حيث:

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \frac{٥}{٢}\text{س} & \text{عندما } ٠ \leqslant \text{س} \leqslant ٥٠٠٠ \\ ٢\text{س} + ٢٥٠٠ & \text{عندما } ٥٠٠٠ < \text{س} \leqslant ١٥٠٠٠ \\ \frac{٣}{٢}\text{س} + ١٠٠٠٠ & \text{عندما } ١٥٠٠٠ < \text{س} \leqslant ٦٠٠٠٠ \end{cases}$$

المبلغ بالجنيه الذى تتقاضاه شركة لتوزيع أحد الأجهزة الكهربية، حيث س تمثل عدد الأجهزة الموزعة، أوجد:

أ د(٥٠٠٠)　　ب د(١٠٠٠٠)　　جـ د(٥٠٠٠٠)

١٣ الربط بالهندسة: إذا كان ح محيط مربع طول ضلعه ل. اكتب محيط المربع كدالة فى طول ضلعه ح (ل) ثم أوجد:

أ ح (٣)　　ب ح $\left(\frac{١٥}{٤}\right)$

١٤ الربط بالهندسة: إذا كانت م مساحة دائرة طول نصف قطرها نق. اكتب المساحة كدالة فى طول نصف القطر م (نق) ثم أوجد م$\left(\frac{١}{٢}\right)$ ، م(٥).

١٥ عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية:

أ د(س) = $\frac{\text{س} + ٣}{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦}$　　ب د(س) = $\frac{\text{س} + ١}{\text{س}^{٣} + ١}$

جـ د(س) = $\sqrt{\text{س} - ٢}$　　د د (س) = $\sqrt{٤ - \text{س}}$

الوحدة الأولى

١ - ٢

اطراد الدوال

Monotonicity of Functions

سوف تتعلم

- اطراد الدوال.
- استخدام البرامج الرسومية مثل (*Geogebra*) فى رسم منحنى دالة

المصطلحات الأساسية

- اطراد. *Monotony*
- دالة تزايدية. *Increasing Function*
- دالة تناقصية. *Decreasing Function*
- دالة ثابتة. *Constant Function*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

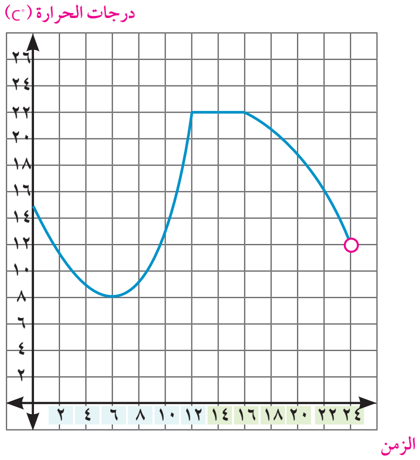
فكر و ناقش

يوضح الشكل البياني المقابل درجات الحرارة المسجلة بمدينة القاهرة فى أحد الأيام ، لاحظ التغير فى درجات الحرارة بالنسبة للزمن، ثم حدد من الرسم:

أ فترات تناقص درجات الحرارة.

ب فترات تزايد درجات الحرارة.

جـ فترات ثبات درجات الحرارة.



تساعدنا صفات منحنيات الدوال فى معرفة سلوك الدالة د و تحديد فترات تزايد أو تناقص أو ثبوت د(س) كلما زادت س وهو مايعرف باطراد الدالة.

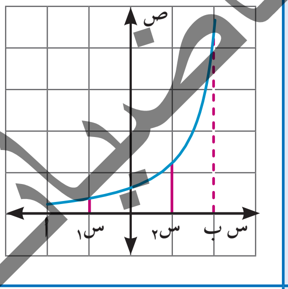
تعلم

تزايد الدالة:

يقال للدالة د أنها تزايدية فى الفترة]أ ، ب[

إذا كان لكل $س_١$ ، $س_٢$ ∈]أ ، ب[**حيث:** $س_٢ > س_١$

فإن: $د(س_٢) > د(س_١)$

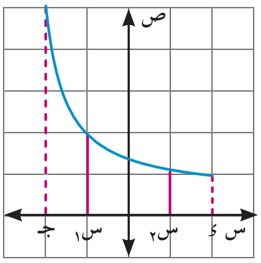


تناقص الدالة:

يقال للدالة د أنها تناقصية فى الفترة]جـ ، ى[

إذا كان لكل $س_١$ ، $س_٢$ ∈]جـ ، ى[**حيث:** $س_٢ > س_١$

فإن: $د(س_٢) < د(س_١)$

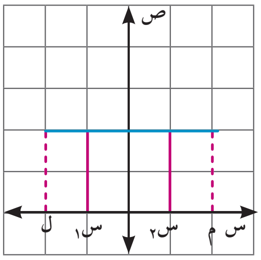


ثبوت الدالة:

يقال للدالة د أنها ثابتة فى الفترة]ل ، م[

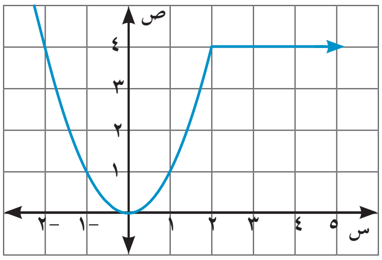
إذا كان لكل $س_١$، $س_٢$ ∈]ل ، م[**حيث:** $س_٢ > س_١$

فإن: $د(س_٢) = د(س_١)$



مكتبة مستشار الرياضيات في مصر

مثال

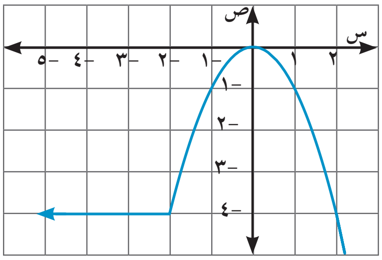


① ابحث اطراد الدالة الممثلة فى الشكل البيانى المقابل.

الحل

- الدالة تناقصية فى الفترة]-∞، ٠[
- الدالة تزايدية فى الفترة]٠، ٢[
- الدالة ثابتة فى الفترة]٢،∞[

حاول أن تحل

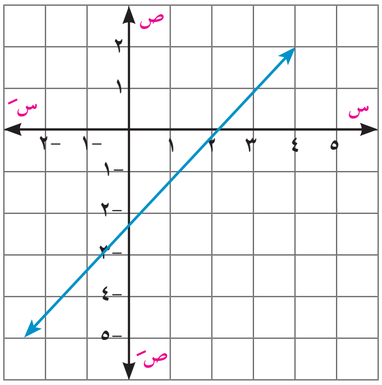


① فى الشكل المقابل:
ابحث الفترات التى تكون فيها الدالة تزايدية، والفترات التى تكون فيها تناقصية، والفترات التى تكون فيها ثابتة.

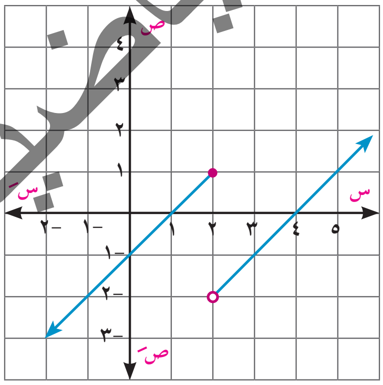
مثال

② يوضح كل شكل من الأشكال البيانية التالية منحنى الدالة د: س ⟵ ص ، استنتج من الرسم مجال ومدى الدالة، وابحث اطرادها.

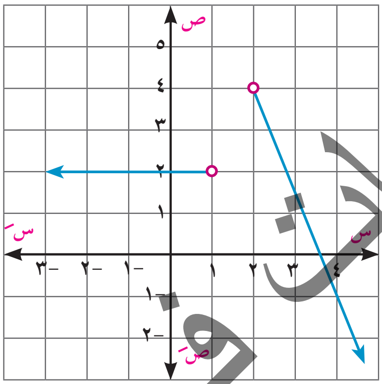
أ



ب



ج



الحل

أ مجال د = ع =]-∞، ∞[، مدى د =]-∞، ∞[الدالة تزايدية فى]-∞ ، ∞[

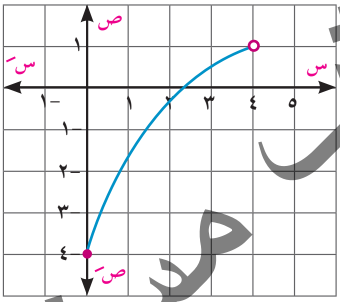
ب مجال د =]-∞ ، ٢[∪]٢،∞[=]-∞، ∞[
الدالة تزايدية فى]-∞، ٢[، تزايدية أيضًا فى]٢ ، ∞[

ج مجال د=]-∞ ، ١[∪]٢،∞[، مدى د =]-∞ ، ٤[
الدالة ثابتة فى]-∞ ، ١[، وتناقصية فى]٢ ، ∞[

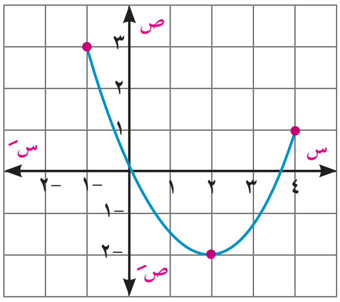
حاول أن تحل

٢ فى كل من الأشكال التالية استنتج مجال ومدى الدالة ثم ابحث اطرادها:

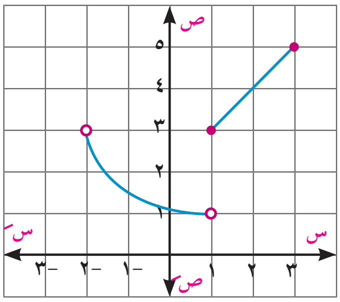
أ



ب



ج



استخدام البرامج الرسومية فى دراسة خواص الدوال

تتعدد البرامج الرسومية لتمثيل الدوال بيانيًّا، ومن أشهرها برنامج *GeoGebra* المجانى للتابلت أو الحاسوب.

نشاط

باستخدام برنامج *GeoGebra* مثل بيانيًّا الدالة د حيث: $د(س) = س^{٣} - ٣س + ٢$.

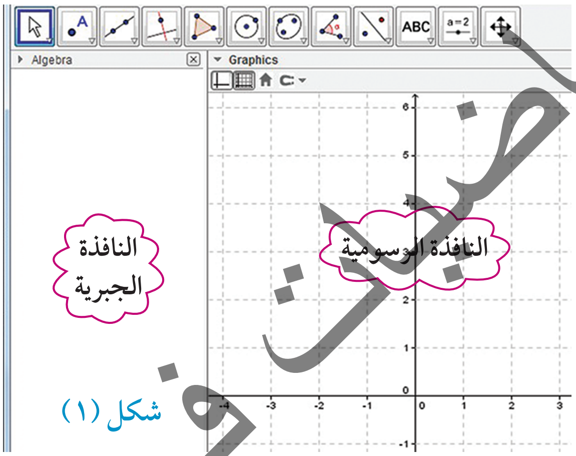
ومن الرسم أوجد مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها.

لتنفيذ النشاط اتبع الخطوات التالية:

١- افتح نافذة الجبر، والرسم البيانى من برنامج (*GeoGebra*)

ثم إضغط ▼ *Graphics* واختر ▦ لتصل إلى

النافذة المبينة فى شكل (١).


Algebra
Graphics
ABC
a=2
النافذة الجبرية
النافذة الرسومية
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
6
5
4
2
1
-1

شكل (١)

٢- فى النافذة الجبرية اكتب قاعدة الدالة:

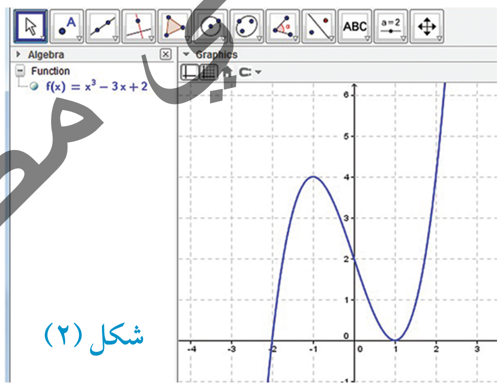
$د(س) = س^{٣} - ٣س + ٢$ بمربع الادخال (input)

على النحو التالى:

2 + χ 3 – 3 ^ χ → إبدأ

ثم اضغط ⏎ فيظهر فى النافذة البيانية منحنى الدالة،

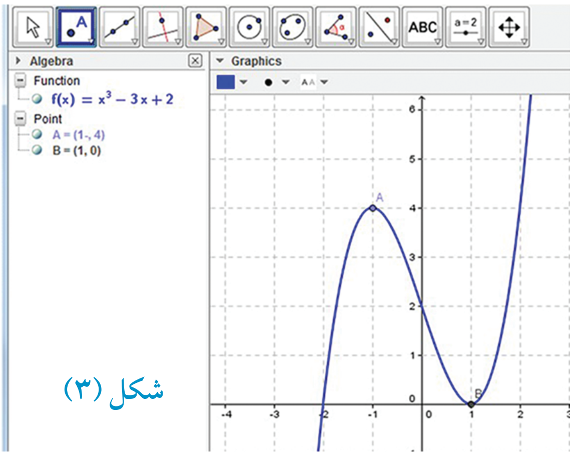
وفى النافذة الجبرية قاعدة الدالة كما فى شكل (٢)


Algebra
Function
f(x) = x³ − 3x + 2
Graphics
ABC
a=2
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
6
5
4
3
2
1
-1

شكل (٢)

مكتب مستشار الرياضيات فى مصر

٣- لتحديد نقط على منحنى الدالة إختر A من شريط الأدوات ثم نقطة جديدة من القائمة المنسدلة، حرك المؤشر حتى تصل إلى موضع النقطة المراد تحديدها على المنحنى، واضغط إدخال لتظهر النقطة على المنحنى فى النافذة الرسومية كما يظهر إحداثيي النقطة فى النافذة الجبرية كما فى شكل (٣).



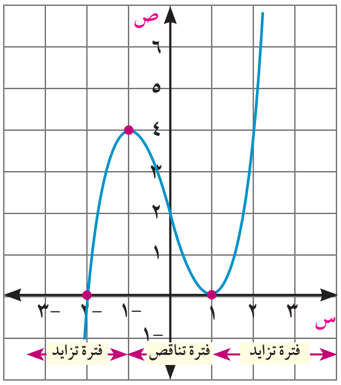
Function
f(x) = $x^3 - 3x + 2$
Point
A = (−1, 4)
B = (1, 0)

شكل (٣)

من الشكل البيانى للدالة نجد:

أ مجال د =]-∞، ∞[، مدى د=]-∞، ∞[

ب الدالة تزايدية فى]-∞ ، -١[، تناقصية فى]-١ ، ١[، تزايدية فى]١ ، ∞[

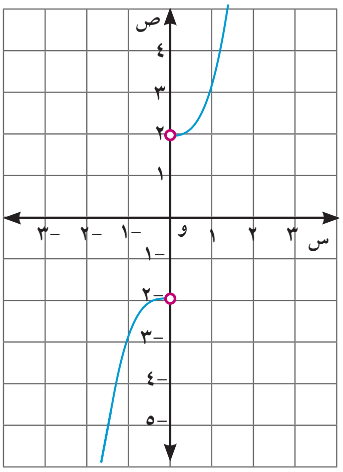


تطبيق

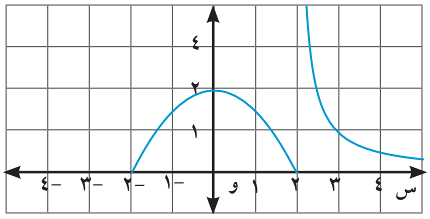
باستخدام برنامج *Geogebra* ارسم منحنى الدالة د: د(س) = ٣س - $س^{٣}$ ومن الرسم ابحث اطراد الدالة

تمـــارين ١ – ٢

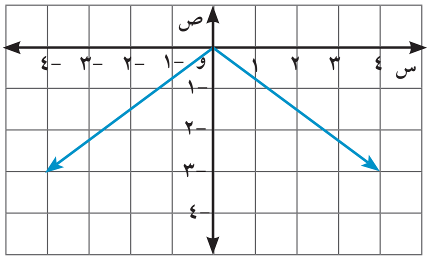
① الأشكال الآتية تمثل الشكل البيانى لبعض الدوال، استنتج من الرسم المدى وابحث الاطراد:



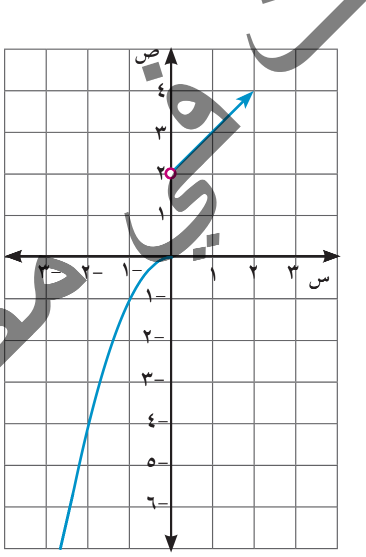
شكل (١)



شكل (٢)



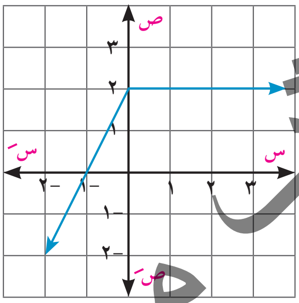
شكل (٣)



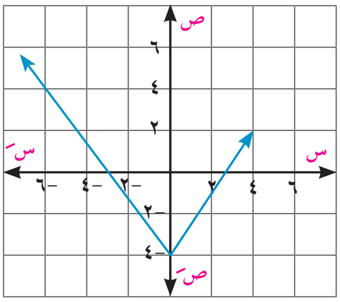
شكل (٤)

② حدد مجال كل من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية، ثم اكتب مدى الدالة وابحث اطرادها.

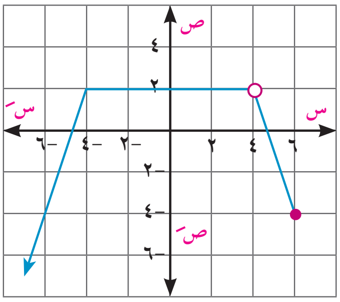
أ



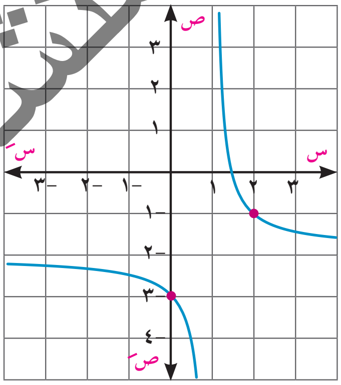
ب



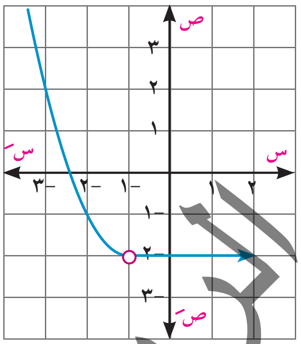
ج



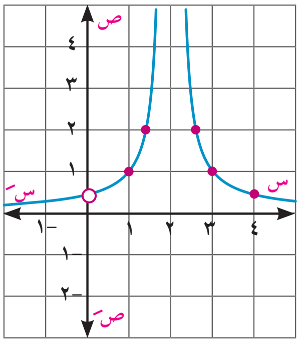
د



هـ



و



③ إذا كانت د : [-٢ ، ٦] ⟵ ع

د(س) = { ٤ - س عندما س < ١
　　　　 س عندما ١ ≤ س ≤ ٦

ارسم الشكل البياني للدالة د ، واستنتج من الرسم مدى الدالة وابحث اطرادها.

④ باستخدام أحد البرامج الرسومية ؛ ارسم منحنى الدالة د فى كل من مايأتى ، ومن الرسم استنتج مدى الدالة وابحث اطرادها.

أ د(س) = س^{٢} - ٥　　**ب** د (س) = ٤ - س^{٢}　　**ج** د(س) = (س-١)^{٢} + ١

د د (س) س^{٣}　　**هـ** د(س) = س^{٣} - ٣س　　**و** د(س) $\frac{-١}{س - ٢}$

١ - ٣

الدوال الزوجية و الدوال الفردية

Even and Odd Functions

سوف تتعلم

- التماثل فى منحنيات الدوال.
- الدوال الزوجية.
- الدوال الفردية.

المصطلحات الأساسية

تماثل	*Symmetry*
دالة زوجية	*Even Function*
دالة فردية	*Odd Function*

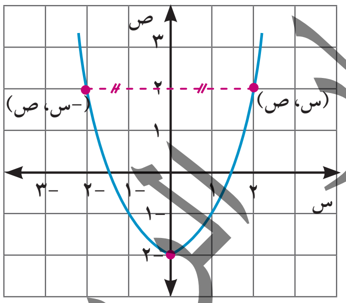
الأدوات المستخدمة

- آله حاسبة علمية - برامج رسومية للحاسوب

قد يتميز الشكل البيانى للدالة د حيث ص = د(س) بصفات هندسية تلاحظ من الرسم بسهولة، و يمكن استخدامها فى دراسة الدوال وتطبيقاتها، وأشهر هذه الصفات التماثل Symmetry حول محور الصادات أو التماثل حول نقطة الأصل.

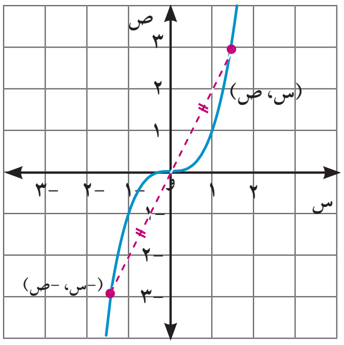
تمهيد

سبق أن درست التماثل حول مستقيم، حيث يمكن طى الشكل على المستقيم؛ لينطبق نصفا المنحنى تمامًا، ودرست كذلك التماثل حول نقطة الأصل:



التماثل حول محور الصادات

شكل (١)



التماثل حول محور نقطة الأصل.

شكل (٢)

فى شكل (١):

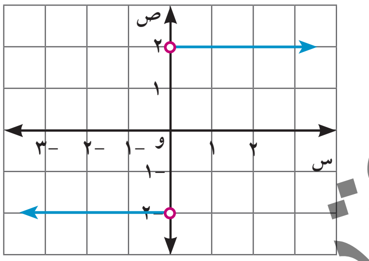
تكون النقطة (- س ، ص) الواقعة على الشكل البيانى لمنحنى الدالة هى صورة النقطة (س ، ص) الواقعة عليه أيضًا بالانعكاس حول محور الصادات.

فى شكل (٢):

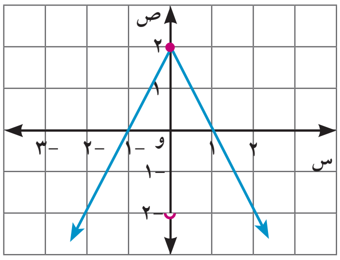
يوضح الشكل البيانى للعلاقة بين س ، ص تماثل المنحنى حول نقطة الأصل، حيث إن النقطة (-س، -ص) هي صورة النقطة (س، ص) الواقعة على نفس المنحنى.

؟ حاول أن تحل

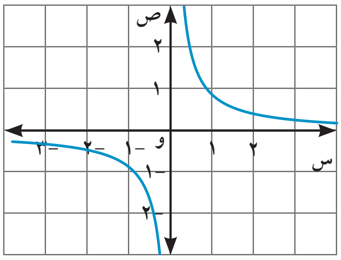
① فى كل شكل من الأشكال الآتية بيِّن المنحنيات المتماثلة حول محور الصادات والمنحنيات المتماثلة حول نقطة الأصل.



(أ)



(ب)



(جـ)

تفكير ناقد:

هل تتماثل منحنيات جميع الدوال حول محور الصادات أو حول نقطة الأصل فقط؟ **فسر إجابتك**.

الدوال الزوجية والدوال الفردية: *Even and Odd Functions*

تعلم

الدالة الزوجية: يقال للدالة د: س ⟵ ص إنها دالة زوجية إذا كان د (-س) = د (س)، لكل س ، -س ∈ س~
ويكون منحنى الدالة الزوجية متماثلًا حول محور الصادات.

الدالة الفردية: يقال للدالة د: س ⟵ ص إنها دالة فردية إذا كان د (-س) = - د (س)، لكل س ، -س ∈ س~
ويكون منحنى الدالة الفردية متماثلًا حول نقطة الأصل.

لاحظ: كثير من الدوال ليست زوجية وليست فردية

عند بحث نوع الدالة من حيث كونها زوجية أو فردية يجب تحقق شرط انتماء العنصرين س ، -س إلى مجال الدالة، و إذا لم يتحقق كانت الدالة ليست زوجية وليست فردية دون إيجاد د(-س)

مثال

① ابحث نوع الدالة د فى كل مماياتى من حيث كونها دالة زوجية أو فردية.

أ د (س) = $س^{٢}$ ب د(س) = $س^{٣}$ ج د(س) = $\sqrt{س + ٣}$ د د(س) = جتا س

الحل

أ د (س) = $س^{٢}$ ، مجال د = ع

∴ لكل س ، -س ∈ ع ، يكون: د(-س)= $(-س)^{٢}$ = $س^{٢}$

أى أن: د(-س) = د(س) ∴ د دالة زوجية

ب د(س) = $س^{٣}$ ، مجال د = ع

∴ لكل س ، -س ∈ ع ، يكون: د(-س) = $(-س)^{٣}$ = - $س^{٣}$

أى أن: د(-س)= -د(س) ∴ د دالة فردية

ملاحظة هامة:

تسمى الدالة د: ع ⟵ ع ، د(س) = أ $س^{ن}$ حيث أ ≠ ٠ ، ن ∈ $ص^{+}$ دالة القوى ، وتكون الدالة زوجية عندما ن عدد زوجي ، فردية عندما ن دعدد فردى.

مكتبة مستشار الرياضيات في مصر

ج د(س) = $\sqrt{\text{س} + ٣}$ ، مجال د = [-٣، ∞[

لاحظ أن ٤∈ [-٣، ∞[بينما -٤∉ [-٣، ∞[

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

د د(س) = جتا س ، مجال د = ع

∴ لكل س ، -س ∈ ع يكون:

د(-س) = جتا (-س) = جتا س

أى أن: د(-س) =د(س) ∴ د دالة زوجية

تذكر أن

جا (-س) = - جا س

جتا (-س) = جتا س

ظا (-س) = - ظا س

حاول أن تحل

٢ ابحث نوع الدالة د فى كل ممايأتى من حيث كونها دالة زوجية أو فردية أو غير ذلك.

أ د (س) = جا س

ب د (س) = س^{٢} + جتا س

ج د(س) = س^{٣} - جا س

د د(س) = س^{٢} جتا س

هـ د(س) = س^{٣} جا س

و د(س) = س^{٣} جتا س

ز د(س) = س^{٣} + س^{٢}

ح د(س) = جا س + حتا س

ط د(س) = جاس جتا س

ماذا تستنتج؟

خواص هامة:

إذا كان كل من: د$_{١}$ ، د$_{٢}$ دالة زوجية ، وكان كل من: ر$_{١}$، ر$_{٢}$ دالة فردية ، فإن:

١) د$_{١}$ + د$_{٢}$ دالة زوجية

٢) ر$_{١}$ + ر$_{٢}$ دالة فردية.

٣) د$_{١}$ × د$_{٢}$ دالة زوجية

٤) ر$_{١}$ × ر$_{٢}$ دالة زوجية.

٥) د$_{١}$ × ر$_{٢}$ دالة فردية

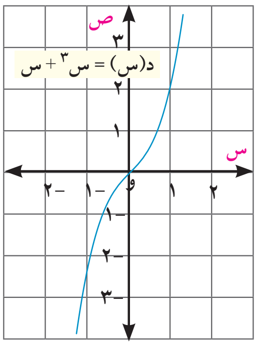
٦) د$_{١}$ + ر$_{٢}$ ليست زوجية وليست فردية.

باستخدام الخواص السابقة ، تحقق من صحة إجابتك فى بند حاول أن تحل (٢)

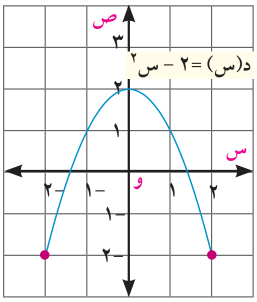
مثال

٢ يوضح كل شكل من الأشكال البيانية التالية منحنى الدالة د، حدد من الرسم ما إذا كانت الدالة د زوجية أو فردية أو غير ذلك وحقق إجابتك جبريًا.

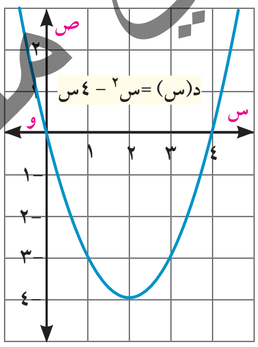
أ



ب



ج



الحل

أ د (س) = س^{٣} + س، من الشكل البيانى للدالة د نلاحظ أن:

مجال د = ع، منحنى الدالة متماثل حول نقطة الأصل ؛ أى أن الدالة فردية

∵ كل س ، -س ∈ ع ∴ د (-س) = (-س)^{٣} + (-س)

بالتبسيط: د (-س) = - س^{٣} - س

نأخذ (-١) عاملًا مشتركًا د (-س) = - (س^{٣} + س)

د (-س) = - د (س)

أى أن الدالة فردية.

ب د (س) = ٢ - س^{٢}، من الشكل البيانى للدالة د نلاحظ أن

مجال د = [-٢، ٢] ، ومنحنى الدالة متماثل بالنسبة لمحور الصادات؛ أى أن الدالة زوجية

∵ كل س ، -س ∈ [-٢، ٢] ∴ د (-س) = ٢ - (-س)^{٢}

بالتبسيط د (-س) = ٢ - س^{٢}

د (-س) = د (س) **أى أن** الدالة زوجية

جـ د (س) = س^{٢} - ٤س ، من الشكل البيانى للدالة د نلاحظ أن:

مجال د= ع ، ومنحنى الدالة ليس متماثلًا حول محور الصادات، وليس متماثلًا بالنسبة لنقطة الأصل؛ **أى أن** الدالة ليست زوجية وليست فردية.

∵ كل س ، -س ∈ ع ∴ د (-س) = (-س)^{٢} - ٤ (-س)

بالتبسيط د (-س) = س^{٢} + ٤س ≠ د(س) ∴ د ليست زوجية

ولكن - د (س) = - س^{٢} + ٤ س

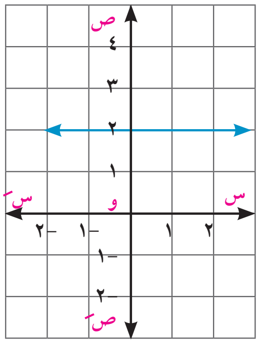
لذلك فإن د (-س) ≠ - د (س) ∴ د ليست فردية

أى أن الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

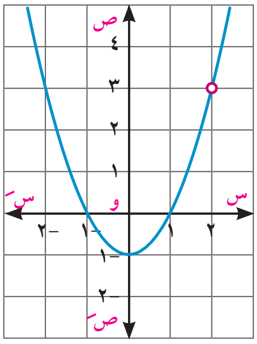
حاول أن تحل

③ اذكر نوع كل من الدوال الممثلة بالأشكال البيانية الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

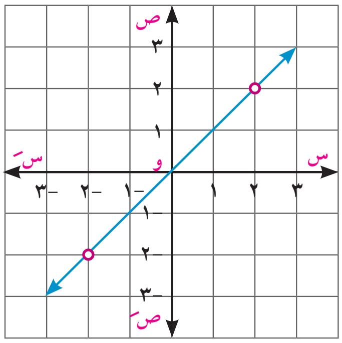
أ



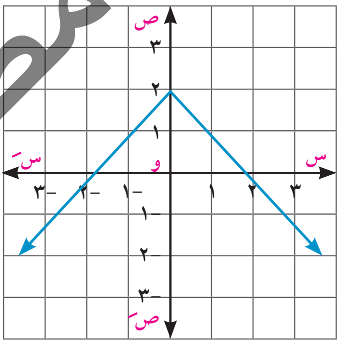
ب

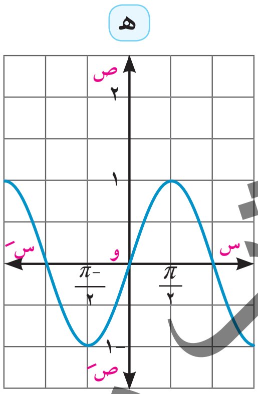


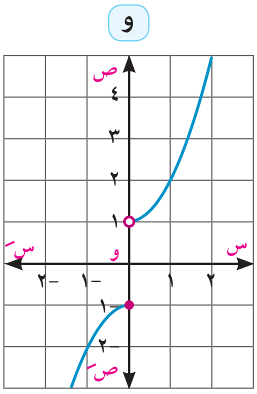
جـ

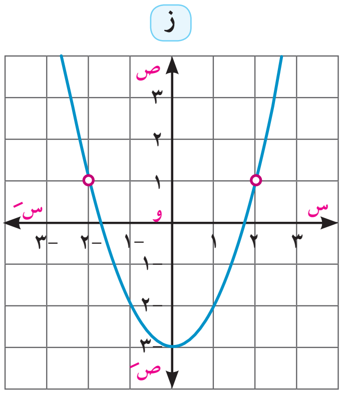


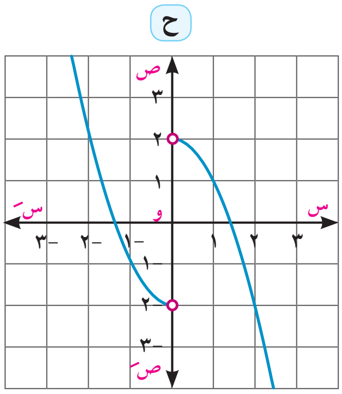
د









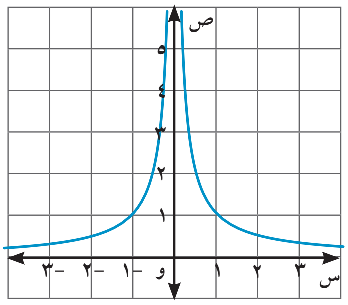


مثال

③ يمثل الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث:

$$د(س) = \begin{cases} -\frac{١}{س} & \text{عندما } س < ٠ \\ \frac{١}{س} & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$$

بين أن هذه الدالة زوجية.



الحل

من الشكل البيانى المجاور يتضح أن منحنى الدالة متماثل حول محور الصادات؛ أى أن الدالة زوجية.

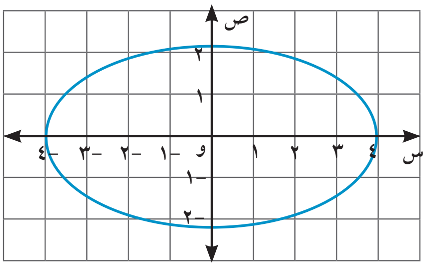
؟ حاول أن تحل

④ مثِّل الدالة د حيث $د(س) = \begin{cases} س + ٢ & \text{حيث } س \geq -٢ \\ -س -٢ & \text{حيث } س < -٢ \end{cases}$ بيانيًّا.

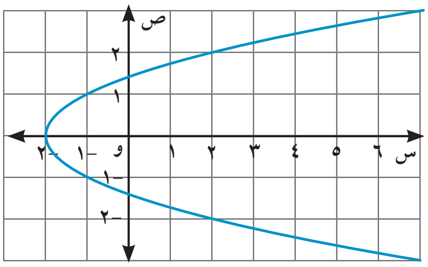
ثم بيِّن: هل الدالة زوجية أو فردية أو غير ذلك؟

تمارين ١ - ٣

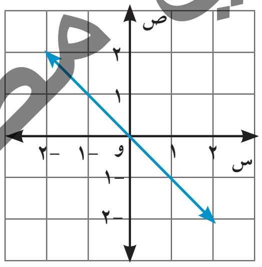
① اذكر ما إذا كان تماثل المنحنى حول محور السينات أو محور الصادات أو نقطة الأصل ثم فسِّر إجابتك.



شكل (١)

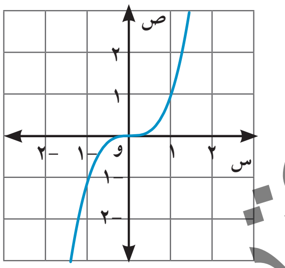


شكل (٢)

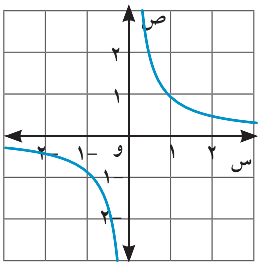


شكل (٣)

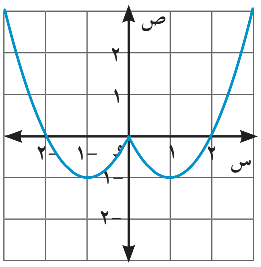
مكتبة مستشار الرياضيات في مصر



شكل (٤)

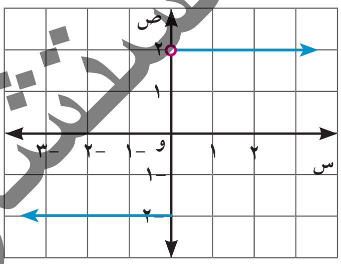


شكل (٥)

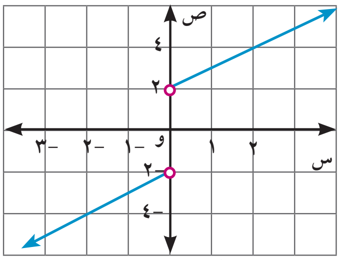


شكل (٦)

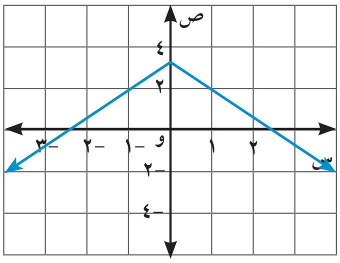
② أوجد مدى كل دالة وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.



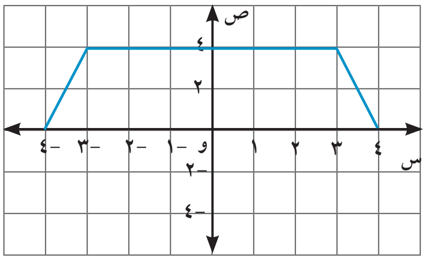
شكل (أ)



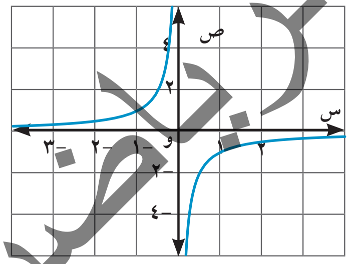
شكل (ب)



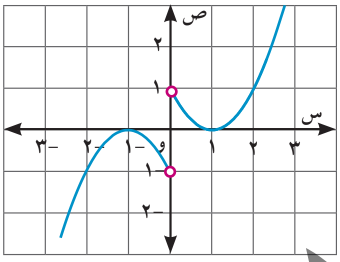
شكل (جـ)



شكل (د)



شكل (هـ)



شكل (و)

③ ابحث نوع الدالة د من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

أ د(س) = س^{٤} + س^{٢} - ١
ب د (س) = ٣ س - ٤ س^{٣}
ج د (س) = ٥
د د(س) = س^{٢} - ٣س
هـ د (س) = $\frac{\text{س}^{٣} + ٢}{\text{س} - ٣}$
و د(س) = س حتا س

④ إذا كانت د$_{١}$، د$_{٢}$، د$_{٣}$ دوال حقيقية حيث د$_{١}$(س) = س^{٥}، د$_{٢}$(س) = حاس، د$_{٣}$(س) = ٥س^{٢}، فبين أى الدوال الآتية زوجية وأيها فردية وأيها غير ذلك.

أ د$_{١}$ + د$_{٢}$
ب د$_{١}$ + د$_{٣}$
ج د$_{١}$ × د$_{٢}$
د د$_{٣}$ × د$_{٢}$

⑤ ارسم منحنيات كل من الدوال المعرفة كمايلى، ثم بين أيا منها زوجية، وأيا منها فردية وأيها غير ذلك، ثم ابحث اطرادها.

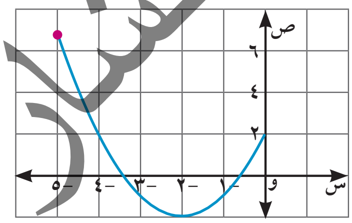
أ د(س) = { ٢ عندما س > ٠
  ‎-٢ عندما س < ٠

ب د (س) = { - س عندما س ≥ ٠
  س عندما س < ٠

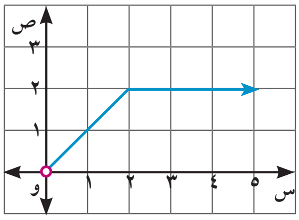
ج د(س) = { س - ١ عندما س ≥ ٠
  ٧س عندما س < ٠

د د(س) = { س + ١ عندما س ≥ ٠
  ١ - س عندما س < ٠

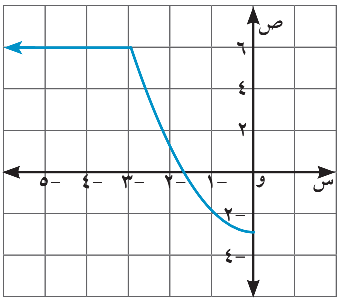
⑥ أجب عن ما يلي من خلال الأشكال الآتية:



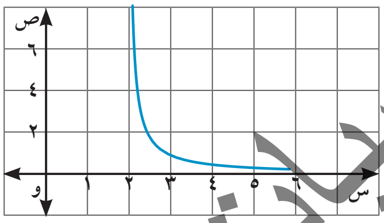
شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)



شكل (٤)

أولًا: أكمل رسم شكل (١) وشكل (٣) فى كراستك، بحيث تصبح الدالة زوجية على مجالها.

ثانيًا: أكمل رسم شكل (٢) وشكل (٤) فى كراستك، بحيث تصبح الدالة فردية على مجالها.

ثالثًا: حدد مجال ومدى الدالة فى كل حالة ثم ابحث اطرادها.

١ - ٤

التمثيل البيانى للدوال والتحويلات الهندسية

Graphical Representation of functions, Geometrical Transformations

الدالة كثيرة الحدود *Polynomial Functions*

سبق أن درست الدالة كثيرة الحدود التى قاعدتها على الصورة:

د(س) = $أ_{٠} + أ_{١}س + أ_{٢}س^{٢} + أ_{٣}س^{٣} + ... + أ_{ن}س^{ن}$

حيث: $أ_{٠}$ ، $أ_{١}$ ، $أ_{٢}$ ، $أ_{٣}$ ،....... ، $أ_{ن} \in$ ع ، $أ_{ن} \neq ٠$ ، ن $\in$ ط

وعلمت أن المجال والمجال المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية ع (أو مجموعة جزئية منها) ، ولذلك تسمى هذه الدوال بدوال كثيرة الحدود من الدرجة ن ، ودرجة كثيرة الحدود هى أعلى قوة يأخذها المتغير المستقل س.

لاحظ:

١- إذا كان د(س) = $أ_{٠}$ ، $أ_{٠} \neq ٠$ فإن د تسمى دالة كثيرة الحدود الثابتة.

٢- دوال كثيرة الحدود من الدرجة الأولى تسمى دوالاً خطية ، ومن الدرجة الثانية تسمى دوالاً تربيعية ، ومن الدرجة الثالثة تسمى دوالاً تكعيبية.

٣- عند جمع أو طرح دوال قوى مختلفة وثوابت ، نحصل على دالة كثيرة الحدود.

٤- أصفار الدالة كثيرة الحدود هى الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنيها مع محور السينات.

رسم منحنيات الدوال *Graphs of Functions*

أولاً: دوال كثيرة الحدود *Polynomial Functions*

تعلم

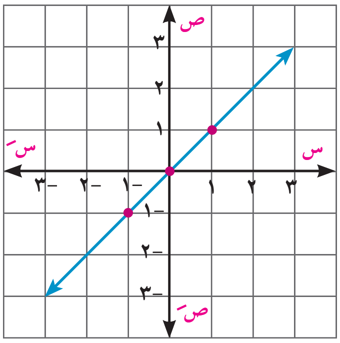
فيما يلى التمثيل البيانى لبعض دوال كثيرات الحدود::

١) د دالة خطية أبسط صورة لها هى :

$$\boxed{د(س) = س}$$

وهى دالة د ترفق العدد بنفسه، ويمثلها خط مستقيم يمر بالنقطة (٠، ٠)، وميله = ١

(تحقق من: مدى د= ع ، د فردية ، د تزايدية فى ع)



سوف تتعلم

- دوال كثيرة الحدود (الدالة الخطية – الدالة التربيعية – الدالة التكعيبية)
- دالة المقياس (القيمة المطلقة)
- الدالة الكسرية
- استخدام التحويلات الهندسية للدالة د فى رسم المنحنيات

ص = د(س) + أ

ص = د(س + أ)

ص = د(س + أ) + ب

ص = – د(س)

ص = أ د (س)

ص = أ د(س +ب) + جـ

- التحويلات الهندسية لبعض الدوال المثلثية.

المصطلحات الأساسية

تحويل.	*Transformation*
انتقال.	*Translation*
انعكاس.	*Reflection*
رأسى	*Vertical*
أفقى	*Horizontal*
خط تقارب	*Asymptotes*

الأدوات المستخدمة

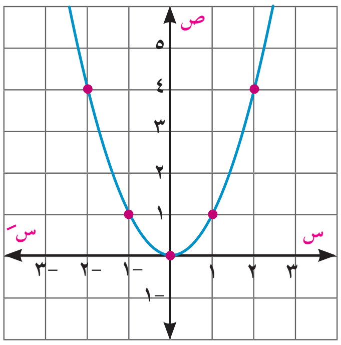
- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

٢) د دالة تربيعية ، أبسط صورة لها هى :

د(س) = س^{٢}

وهى دالة ترفق العدد بمربعه، و يمثلها منحنى مفتوح لأعلى ومتماثل حول محور الصادات ، ونقطة رأس المنحنى هى (٠، ٠)

(**تحقق من:** مدى د = ع ، د زوجية ، د تناقصية فى]-∞ ، ٠[، تزايدية فى]٠،∞[ )

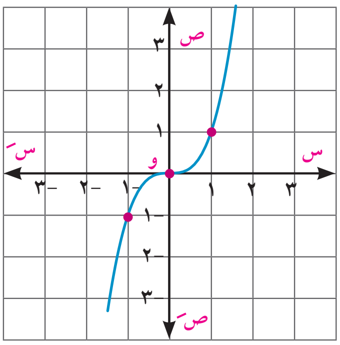


٣) د دالة تكعيبية ، أبسط صورة لها هى :

د(س) = س^{٣}

وهى دالة ترفق العدد بمكعبه، و يمثلها منحنى نقطة تماثله هى (٠، ٠)

(**تحقق من:** مدى د= ع ، د فردية ، د تزايدية فى ع)



مثال

④ ارسم الشكل البيانى للدالة د حيث:

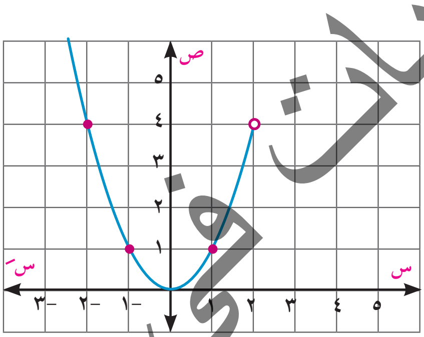
$$د(س) = \begin{cases} س^{٢} & \text{عندما } س < ٢ \\ ٤ & \text{عندما } س > ٢ \end{cases}$$

الحل

١) عندما س < ٢ ، د(س) = س^{٢}

نرسم د(س) = س^{٢} لكل س]-∞ ، ٢[

مع وضع **دائرة مفرغة** عند النقطة **(٢، ٤)** كما فى **شكل (١)**



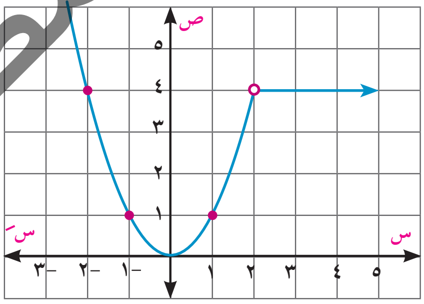
شكل (١)

٢) عندما س > ٢ ؛ د(س) = ٤

ترسم الدالة الثابتة د(س) = ٤ لكل س]٢،∞[

على نفس الشكل البيانى كما فى **شكل (٢)**

لاحظ أن مجال الدالة د = ع - {٢} ، ومدى د = [٠ ، ∞[



شكل (٢)

مكتب مستشار الرياضيات فى مصر

حاول أن تحل

① ارسم الشكل البياني للدالة د حيث:

$$د(س) = \begin{cases} س^{٢} & \text{عندما } س < ٠ \\ س & \text{عندما } س \geqslant ٠ \end{cases}$$

ثم استنتج مدى الدالة وابحث اطرادها.

تعلم

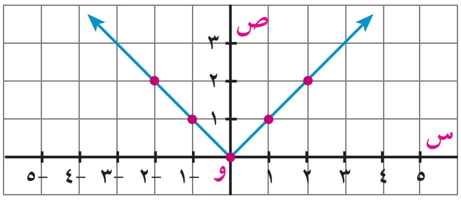
دالة المقياس (دالة القيمة المطلقة): *The Absolute Value Function*

أبسط صورة لدالة المقياس هى

$$\boxed{د(س) = |س| ، س \in ع}$$

وتعرف كما يلي:

$$د(س) = \begin{cases} س & \text{عندما } س \geqslant ٠ \\ -س & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$$



لاحظ أن: $|-٣| = |٣| = ٣$ ، $|٠| = ٠$ ، $\sqrt{(-٢)^{٢}} = \sqrt{٢^{٢}} = ٢$

أى أن: $|س| \geqslant ٠$ ، $|-س| = |س|$ ، $\sqrt{س^{٢}} = |س|$

الدالة د يمثلها شعاعان يبدأن من النقطة (٠، ٠) ميل أحدهما = ١ ، وميل الآخر = -١

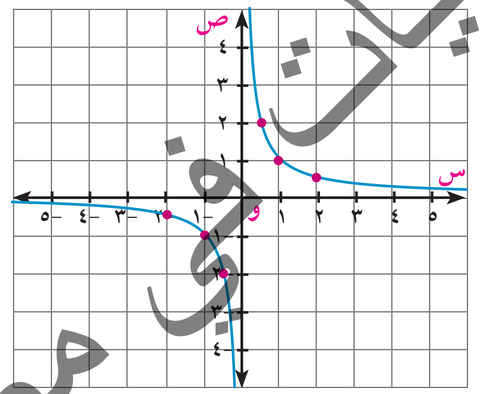
(**تحقق من:** مدى د = [٠ ، ∞[، د زوجية ، د تناقصية فى]-∞ ، ٠[وتزايدية فى]٠، ∞[ )

تعلم

الدالة الكسرية *Rational Function*

أبسط صورة للدالة الكسرية هى:

$$\boxed{د(س) = \frac{١}{س} ، س \in ع - \{٠\}}$$



وهى دالة ترفق العدد بمعكوسه الضربى ، ويمثلها منحنى نقطة تماثله (٠، ٠) ويتكون من جزئين أحدهما يقع فى الربع الأول والآخريقع فى الربع الثالث وكل جزء يقترب من المحورين ولايقطعهما (س = ٠، ص = ٠ خطا تقارب للمنحنى)

(**تحقق من:** مدى د = ع - {٠}، د فردية ، د **تناقصية** فى]-∞، ٠[، **وتناقصية أيضًا** فى]٠، ∞[ )

حاول أن تحل

② ارسم الشكل البيانى للدالة د حيث

$$د(س) = \begin{cases} |س| & \text{عندما } س \leqslant ٠ \\ \frac{١}{س} & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$$

ومن الرسم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها.

التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال *Transformations of Graphs*

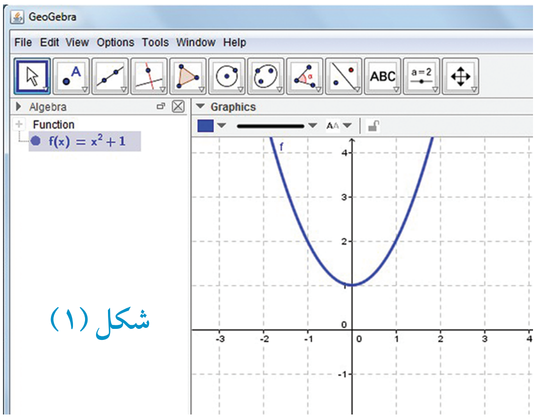
أولاً: الإزاحة الرأسية لمنحنى الدالة *Vertical Translation*

عمل تعاونى

اعمل مع زميل

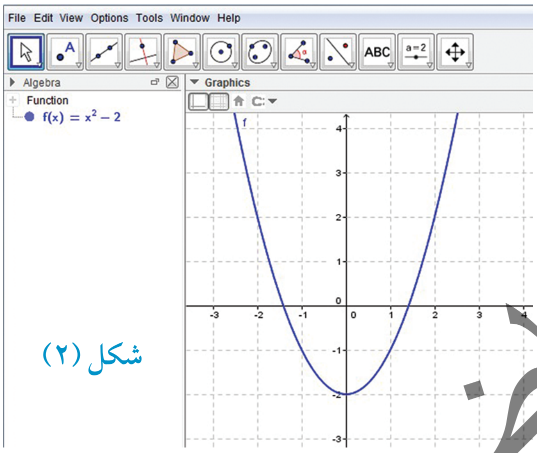
١) ارسم منحنى الدالة د: د(س) = س^{٢} باستخدام برنامج *Geogebra*

٢) ضع المؤشر على رأس منحنى الدالة واسحبه رأسيًا لأعلى وحدة واحدة، ولاحظ تغير قاعدة الدالة لتعبر عن دالة جديدة قاعدتها د(س) = س^{٢} + ١ كما فى **شكل (١)**.


GeoGebra
File Edit View Options Tools Window Help
ABC
a=2
Algebra
Function
f(x) = x² + 1
Graphics
f
-3 -2 -1 0 1 2 3 4
4 3 2 -1

شكل (١)

٣) اسحب رأس منحنى الدالة إلى النقط (٠، ٢)، (٠، ٣) وسجل ملاحظاتك فى كل مرة.


File Edit View Options Tools Window Help
ABC
a=2
Algebra
Function
f(x) = x² − 2
Graphics
f
-3 -2 -1 0 1 2 3
4 3 2 1 -1 -2 -3

شكل (٢)

٤) اسحب منحنى د(س) = س^{٢} وحدتين رأسيًا إلى أسفل ولاحظ تغير قاعدة الدالة لتعبر عن دالة جديدة قاعدتها د(س) = س^{٢} - ٢ كما فى **شكل (٢)**

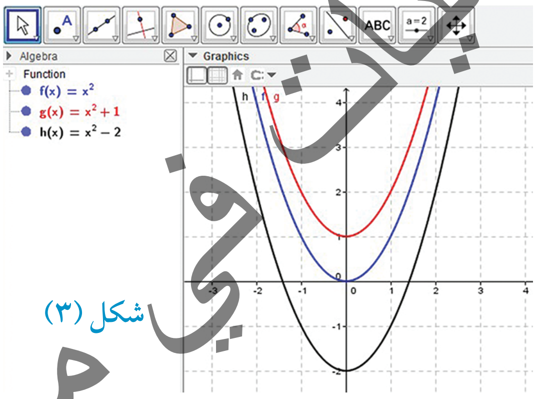
فكر: بين كيف يمكن رسم د(س) = س^{٢} - ٥ باستخدام منحنى د(س) = س^{٢}؟

مما سبق نلاحظ أن: إذا كان:

د(س) = س^{٢} ، ر(س) = س^{٢} + ١ ، ق (س) = س^{٢} - ٢ فإن:

١) منحنى ر(س) هو نفس منحنى د(س) بإزاحة قدرها وحدة واحدة فى الاتجاه الموجب لمحور الصادات.

٢) منحنى ق(س) هو نفس منحنى د(س) بإزاحة قدرها ٢ وحدة فى الاتجاه السالب لمحور الصادات.


ABC
a=2
Algebra
Function
f(x) = x²
g(x) = x² + 1
h(x) = x² − 2
Graphics
h f g
-3 -2 -1 0 1 2 3 4
4 3 2 -1 -2

شكل (٣)

تفكير ناقد: باستخدام منحنى د(س) = س^{٣} بين كيف يمكن رسم منحنيات كل من:

أ) ر(س) = س^{٣} + ٤

ب) ق(س) = س^{٣} - ٥

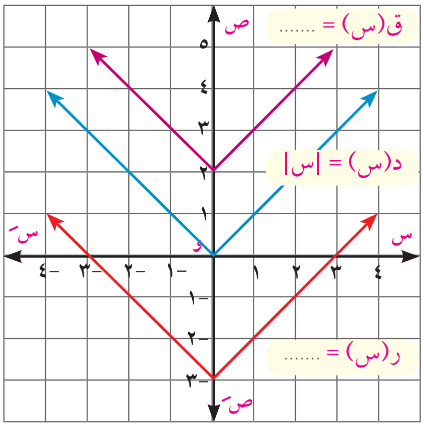
تعلم

رسم المنحنى ص = د(س) + أ

لأى دالة د ؛ يكون المنحنى ص = د(س) + أ هو نفس منحنى ص = د(س) بإزاحة قدرها أ من الوحدات فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$ ، عندما أ > ٠ ، و فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}'}$ عندما أ < ٠ .

مثال

٥ يبين الشكل المقابل منحنيات الدوال د، ر، ق، حيث كل من ر، ق صورة للدالة د بإزاحة رأسية اكتب قاعدة كل من ر، ق



الحل

∵ منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة قدرها ٣ وحدات في اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص َ}}$

∴ ر(س) = د(س) - ٣

∵ د(س) = |س| ∴ ر(س) = |س| - ٣

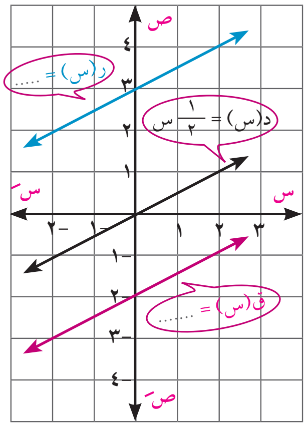
، ∵ منحنى الدالة ق هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة قدرها ٢ وحدة في اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$

∴ ق(س) = د(س) + ٢   ∵ د(س) = |س| ∴ ق (س) = |س| + ٢

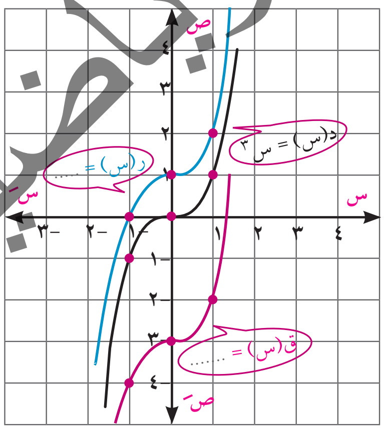
حاول أن تحل

٣ تبين الأشكال التالية منحنيات الدوال د، ر، ق حيث كل من ر، ق صورة للدالة د بإزاحة رأسية. اكتب قاعدة كل من ر، ق في كل شكل.

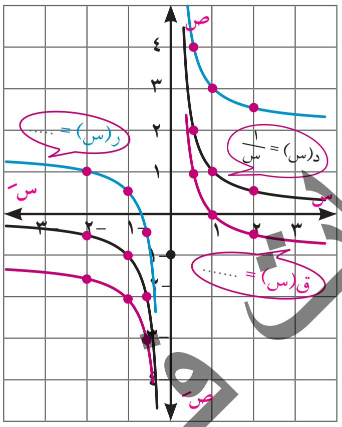
أ



ب



جـ

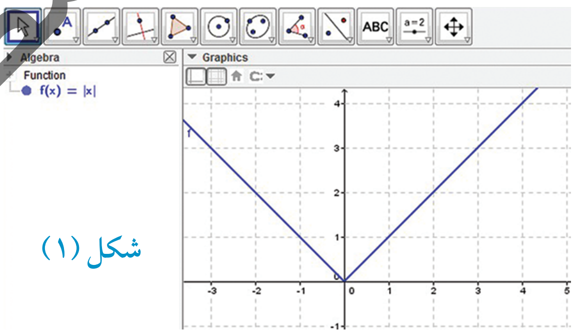


ثانيًا: الإزاحة الأفقية لمنحنى الدالة *Horizontal Translation*

عمل تعاونى

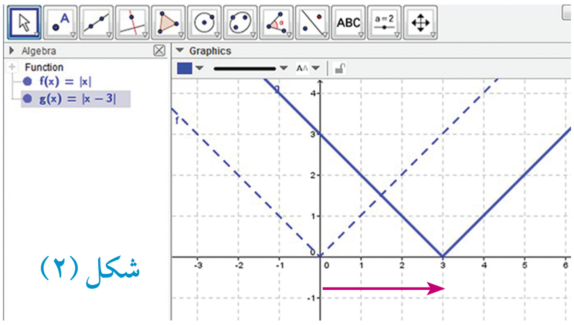
اعمل مع زميل:

١) ارسم منحنى الدالة د: د(س) = |س| مستخدمًا برنامج *Geogebra* بكتابة قاعدة الدالة فى مربع الادخال على النحو التالى: abs(x) ثم اضغط إدخال فيظهر منحنى الدالة فى النافذة البيانية وقاعدتها f(x)=|x| فى النافذة الجبرية كما فى شكل (١)



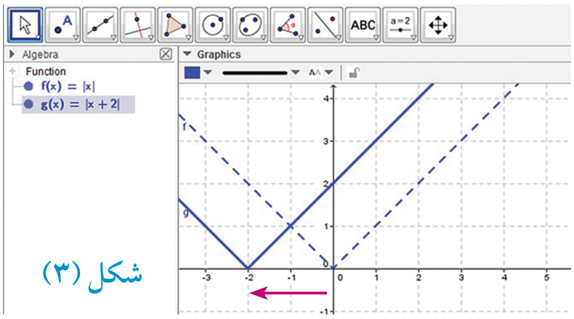
شكل (١)

٢) اسحب منحنى الدالة أفقيًا فى الاتجاه الموجب لمحور السينات بعدد من الوحدات ولاحظ تغير قاعدة الدالة فى النافذة الجبرية كما فى شكل (٢)


ABC
a=2
Algebra
Function
f(x) = |x|
g(x) = |x − 3|
Graphics
f
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
-1
1
2
3
4

شكل (٢)

٣) اسحب منحنى الدالة أيضًا فى الاتجاه السالب لمحور السينات بعدد من الوحدات كما فى شكل (٣)، ماذا تلاحظ؟


ABC
a=2
Algebra
Function
f(x) = |x|
g(x) = |x + 2|
Graphics
f
g
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
-1
1
2
3
4

شكل (٣)

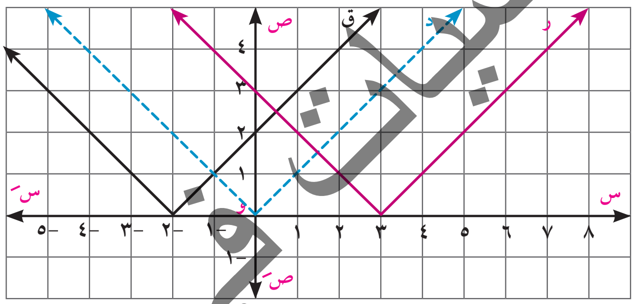
فكر: بين كيف ترسم منحنيا الدالتين ر ، ق باستخدام منحنى الدالة د حيث: د(س) = |س|، ر(س) = |س - ٥| ، ق(س) = |س + ٤|.

تعلم

رسم المنحنى ص = د (س + أ)

لأى دالة د ؛ يكون المنحنى، ص = د(س + أ) هو نفس منحنى ص = د(س) بإزاحة قدرها أ من الوحدات فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$ عندما يكون أ < ٠، وفى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}'}$ عندما يكون أ > ٠

لاحظ: فى الشكل المقابل: د(س) = |س|



١) منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة قدرها ٣ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$

∴ ر(س) = |س - ٣| ونقطة بدء الشعاعين (٣، ٠)

٢) منحنى الدالة ق هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة قدرها ٢ وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}'}$

∴ ق(س) = |س + ٢| ، نقطة بدد الشعاعين (-٢ ، ٠)

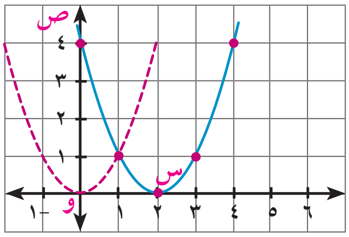
مثال

⑥ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٢} لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيث:

أ ر(س) = (س - ٢)^{٢} ب ع(س) = (س + ٣)^{٢}

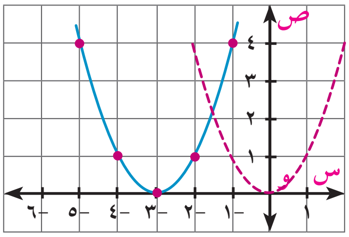
الحل

أ



➤ منحنى ر (س) = (س - ٢)^{٢} هو منحنى د(س) = س^{٢} بإزاحة وحدتين فى الاتجاه الموجب لمحور السينات وتكون نقطة رأس المنحنى هى (٢،٠).

ب



➤ منحنى ع (س) = (س + ٣)^{٢} هو منحنى د(س) = س^{٢} بإزاحة ٣ وحدات فى الاتجاه السالب لمحور السينات ، وتكون نقطة رأس المنحنى هى (-٣ ، ٠).

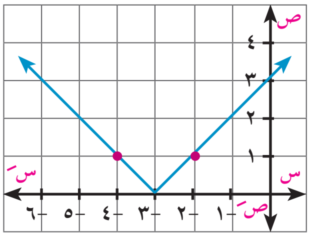
حاول أن تحل

④ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٢} لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيث:

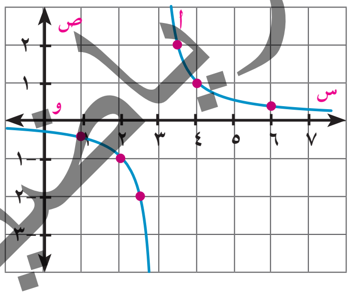
أ ر(س) = (س + ٤)^{٢} **ب** ع (س) = (س – ٣)^{٢}

⑤ اكتب قاعدة الدالة د الممثلة بيانيًّا بالأشكال التالية:

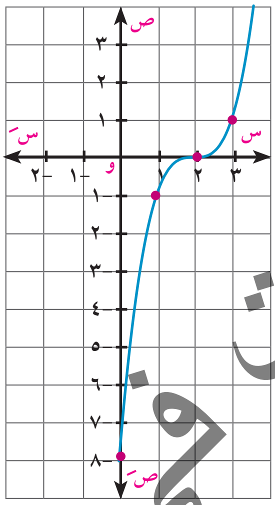
أ



ب



جـ



تفكير ناقد: إذا كان د(س) = س^{٢} ، بين كيف يمكن رسم منحنى الدالة ر حيث ر(س) = (س-٣)^{٢}+٢

رسم المنحنى ص = د(س + أ) + ب

مما سبق نستنتج أن: المنحنى ص = د(س + أ) + ب هو نفس منحنى ص = د(س) بإزاحة أفقية قدرها أ من الوحدات (فى اتجاه $\overleftarrow{وس}$ عندما أ > ٠ ، وفى اتجاه $\overleftarrow{وسَ}$ عندما أ < ٠) ، ثم إزاحة رأسية قدرها ب من الوحدات (فى اتجاه $\overleftarrow{وص}$ عندما ب > ٠ ، وفي اتجاه $\overleftarrow{وصَ}$ عندما ب < ٠)

مكتبة مستشار الرياضيات في مصر

حاول أن تحل

⑥ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = $س^{٢}$ لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيث:

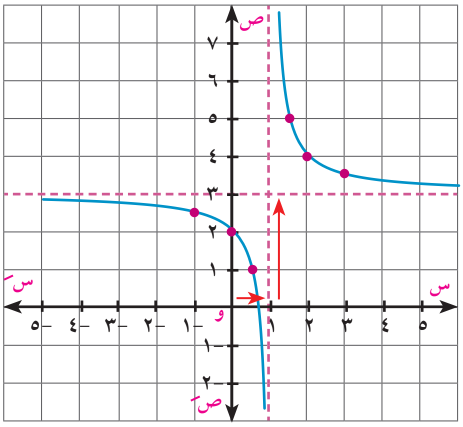
أ ر(س) = $(س + ٢)^{٢} - ٤$

ب ع (س) = $(٣ - س)^{٢} - ١$

مثال

تطبيق التحويلات الهندسية على رسم منحنيات الدوال

⑦ ارسم منحنى الدالة ر حيث ر(س) = $\frac{١}{س - ١} + ٣$ ومن الرسم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها:



الحل

منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$

بإزاحة قدرها وحدة واحدة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$ (أ = -١ < ٠)، ثم

إزاحة قدرها ٣ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$ وتكون نقطة تماثل

منحنى الدالة ر هى النقطة (١ ، ٣) ، مدى ر = ح - {٣}

اطراد الدالة ر:

ر تناقصية فى] - ∞، ١[، وتناقصيه أيضًا فى] ١ ، ∞ [

تفكير ناقد: هل يمكن القول بأن د(س) = $\frac{١}{س - ٢} + ٣$ تناقصية على مجالها؟ فسر إجابتك.

حاول أن تحل

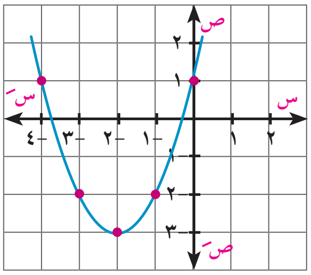
⑦ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$ ، س≠٠ لتمثيل كل من:

أ ر(س) = $\frac{١}{س + ٢} + ١$

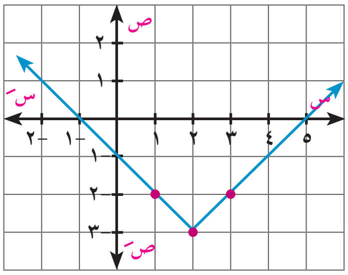
ب ق (س) = $\frac{٢س - ٣}{س - ٢}$

⑧ اكتب قاعدة الدالة د الممثلة بيانيًا بالأشكال التالية :

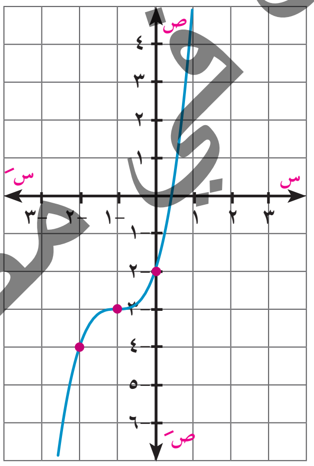
أ



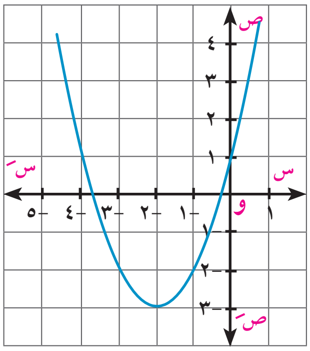
ب

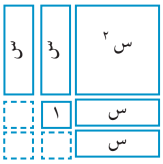


جـ



ملاحظة : يمكن رسم منحنى د(س) = $س^{٢} + ٤س + ١$ باستخدام الإزاحة الأفقية والإزاحة الرأسية للمنحنى ر(س) = $س^{٢}$ كمايلى.





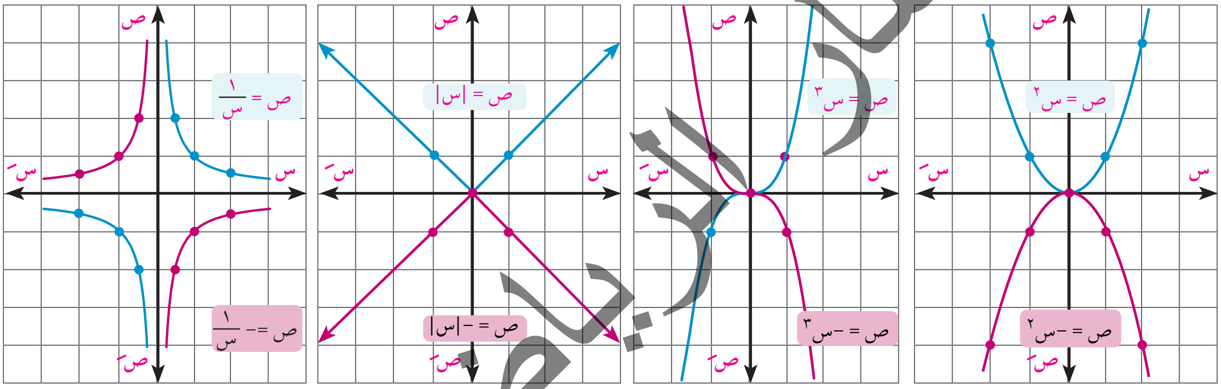
د(س) = س^{٢} + ٤س + ١ بإكمال المربع
= (س^{٢} + ٤س + ٤) - ٣
= (س + ٢)^{٢} - ٣

أى أن منحنى الدالة د (المعطاة) هو نفس منحنى الدالة ر حيث ر(س) = س^{٢} بإزاحة قدرها ٢ وحدة فى اتجاه و $\overleftarrow{\text{سَ}}$ ، ثم ٣ وحدات فى اتجاه و $\overleftarrow{\text{صَ}}$ ويمثله الرسم المقابل.

تطبيق: ارسم منحنى د(س) = س^{٢} + ٦س + ٧ باستخدام الإزاحة الأفقية والإزاحة الرأسية لمنحنى ر(س) = س^{٢} ثم ابحث اطراد الدالة د.

ثالثًا: انعكاس منحنى الدالة فى محور السينات

تبين الأشكال التالية انعكاس منحنيات بعض الدوال الأساسية فى محور السينات.



ماذا تلاحظ ؟ وماذا تستنتج؟

تعلم

رسم المنحنى ص = - د(س)

لأى دالة د، يكون المنحنى ص = - د(س) هو نفس منحنى ص = د(س) بانعكاس فى محور السينات

مثال

تطبيق التحويلات الهندسية على رسم المنحنيات

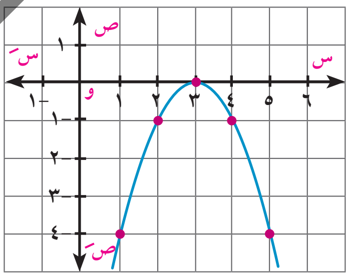
⑧ باستخدام منحنيات الدوال الأساسية ارسم منحنيات الدوال ر ، ق، ع حيث:

أ ر(س) = -(س - ٣)^{٢}

ب ق(س) = ٤ - |س+٣|

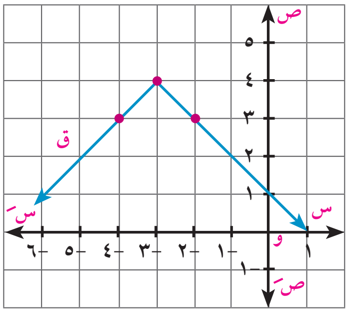
ج ع(س) = ٢ - $\frac{١}{س-٣}$

الحل

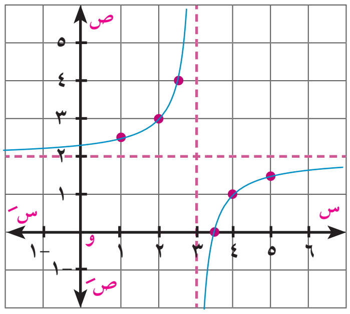


أ منحنى ر(س) هو انعكاس لمنحنى د(س) = س^{٢} فى محور السينات ، ثم إزاحة أفقية قدرها ٣ وحدات فى اتجاه و $\overleftarrow{\text{س}}$ ، وتكون نقطة رأس المنحنى هى (٣، ٠) والمنحنى مفتوح إلى أسفل.

ب منحنى ق(س) هو انعكاس لمنحنى د(س) = |س| فى محور السينات، ثم إزاحة أفقية قدرها ٣ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و سَ}}$ ، و إزاحة رأسية قدرها ٤ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$ ، وتكون نقطة بدء الشعاعين هى النقطة (-٣، ٤) والمنحنى مفتوح لأسفل.



ج منحنى ع(س) هو انعكاس لمنحنى د(س) = $\frac{\text{١}}{\text{س}}$ فى محور السينات، ثم إزاحة أفقية قدرها ٣ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$ ، و إزاحة رأسية قدرها ٢ وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$ ، وتكون نقطة تماثل المنحنى هى (٣، ٢)



؟ حاول أن تحل

٩ فى كل ممايأتى ارسم منحنى الدالة ر حيث:

أ ر(س) = ٣ - (س +١)^{٢} **ب** ر(س) = - (س - ٣)^{٣} **ج** ر(س) = -٣ - |س - ٥|

ثم تحقق من صحة الرسم باستخدام أحد البرامج الرسومية أو الحاسبة البيانية.

رابعًا: تمدد منحنى الدالة: *Expanding of graph*

عمل تعاونى

رسم منحنى ر(س) = أ د (س)

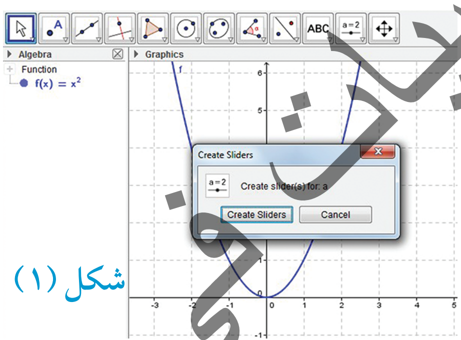
اعمل مع زميل.

١) ارسم منحنى الدالة د: د(س) = س^{٢} باستخدام برنامج *Geogebra* وفى مربع الادخال اكتب قاعدة الدالة ر على النحو التالي:

إبدأ → a ◂ ▸ χ ^ 2 ↵

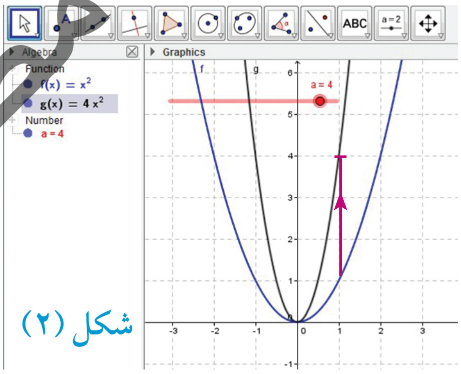
لتظهر لك نافذة جديدة **(شكل ١)**

إختر منها *Create sliders*


ABC
a=2
Algebra
Function
f(x) = x²
Graphics
f
Create Sliders
Create slider(s) for: a
Create Sliders
Cancel

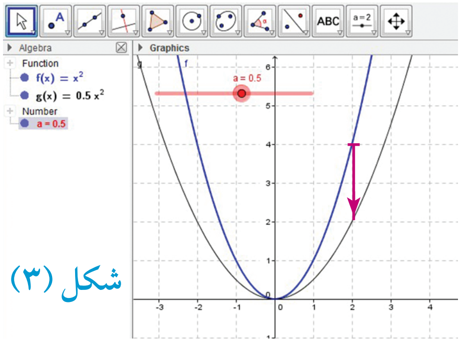
شكل (١)

٢) استخدم مؤشر قيم a لاختيار قيم آخرى لها حيث a>١ ولاحظ حركة منحنى الدالة ر بالنسبة لمنحنى الدالة د لكل س ∋ ع كما فى **شكل (٢)** وعندما a < ١ كما فى **شكل (٣)** ماذا تلاحظ ؟ وماذا تستنتج؟


ABC
a=2
Algebra
Function
f(x) = x²
g(x) = 4 x²
Number
a = 4
Graphics
f
g
a = 4

شكل (٢)

تعلم



شكل (٣)

رسم المنحنى ص = أ د (س)

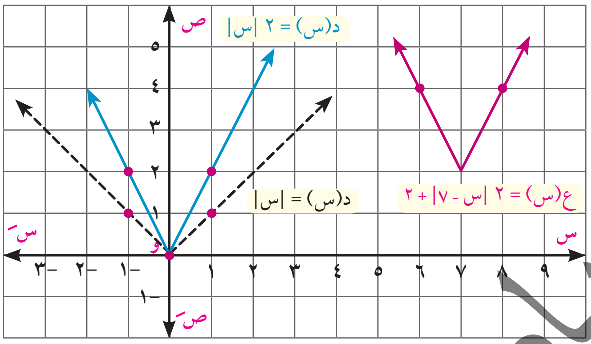
لأى دالة د ؛ يكون المنحنى ص = أ د(س) هو تمدد رأسى لمنحنى ص = د(س) إذا كان أ > ١، و انكماش رأسى لمنحنى ص = د(س) إذا كان ٠ < أ < ١.

مثال

⑨ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع:

أ ر(س) = ٢|س| ب ع(س) = ٢|س - ٧| + ٢

الحل



أ منحنى ر(س) هو تمدد رأسى لمنحنى الدالة د معاملة أ = ٢ > ٠ وعلي ذلك فإن:

لكل (س ، ص) ∈ بيان د

يكون (س، ٢ ص) ∈ بيان ر

ب منحنى ع(س) هو نفس منحنى ر(س) بإزاحة أفقية قدرها ٧ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$ ، و إزاحة رأسية قدرها ٢ وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$

حاول أن تحل

⑩ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٢} لتمثيل الدالتين ر ، ع:

أ ر(س) = $-\frac{١}{٢}$ س^{٢} ب ع(س) = ٢ - $\frac{١}{٢}$ (س - ٥)^{٢}

تحقق من صحة الرسم باستخدام أحد البرامج الرسومية أو الحاسبة البيانية ثم حدد مدى الدالة ع وابحث اطرادها.

نشاط

➤ تطبيق التحويلات الهندسية التى درستها فى الدوال الجبرية السابقة على دوال الجيب وجيب التمام؟

الدوال المثلثية (منحنى دالة الجيب) *Trigonometric functions*

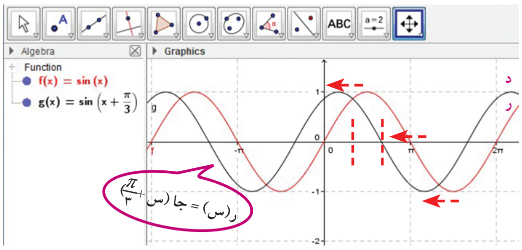
أولا: الإزاحة فى اتجاه محور السينات *First: Translation on X axis*

١) استخدم برنامج جيوجبرا (**Geo Gebra**) وأعد البرنامج بحيث يكون التدريج على محور السينات بالراديان، وذلك بأن تضغط بالفأرة (كليك يمين)، وتختار منها فى آخر سطر محور الفاصلات (السينات) x، ثم تختر منه نظام التدريج (π).

٢) فى أسفل البرنامج (كتابة الأوامر) اكتب الأمر: **sin (x)** ثم اضغط (**enter**) فتعطى لك شكل المنحنى

الأحمر ، تستطيع التحكم فى اللون وسمك المنحنى ، وذلك بالضغط على المنحنى بالفأرة (الضغط شمال)، فيظهر فى أعلى النافذة اللون، وسمك الخط وشكل الخط ٠ منقط ، شرطى ، متصل ،...).

٣) بنفس الطريقة السابقة اكتب الأمر: **sin (x + (π/3))** أى: ص = جا (س + $\frac{\pi}{٣}$) ثم اضغط (**enter**) ولون هذا المنحنى بلون آخر.



Function

f(x) = sin (x)

g(x) = sin $\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

٤) قارن بين المنحنيين. ماذا تلاحظ؟

من الرسم نستنتج أن:

تم إزاحة منحنى دالة الجيب أفقيًا جهة اليسار على محور السينات بمقدار يساوى $\frac{\pi}{٣}$ (كما فى الدوال الحقيقية)، ونلاحظ أن مدى الدالة الثانية هو [-١ ، ١] وهو نفس مدى الدالة **جا س** ، كما نلاحظ أن الدالة جا (س + $\frac{\pi}{٣}$) ليست زوجية وليست فردية؛ لأنه لايوجد تماثل لمنحناها حول محور الصادات أو نقطة الأصل.

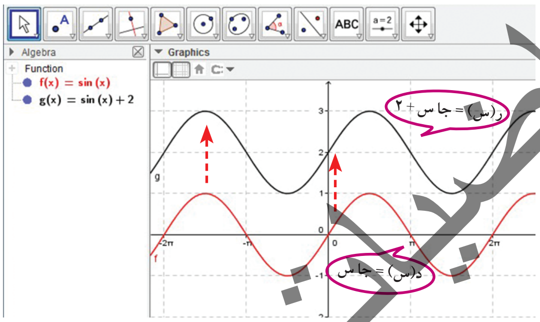
فكر:

- ماذا تتوقع أن يكون اتجاه الإزاحة السينية إذا كانت قاعدة الدالة هى: جا (س - $\frac{\pi}{٣}$).

ثانيا: الإزاحة فى اتجاه محور الصادات *Second: Translation on Y axis*

١) ارسم منحنى الدالة د حيث د(س) = جا س كما سبق.

٢) ارسم منحنى الدالة ر حيث ر(س) = جا س + ٢ بلون آخر **وقارن بين شكل المنحنيين. ماذا تلاحظ؟**



Function

f(x) = sin (x)

g(x) = sin (x) + 2

من الرسم نستنتج أن

منحنى الدالة الثانية هو نفسه منحنى الدالة **جا(س)،** بعد إزاحته بمقدار وحدتين لأعلى.

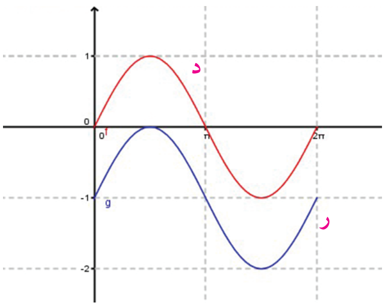
ونلاحظ أن مدى الدالة الثانية هو [١ ، ٣]؛ لأنه تم إزاحته بمقدار وحدتين فى الاتجاه الموجب لمحور الصادات عن الدالة الأولى، وأن الدالة **جا س + ٢** ليست زوجية وليست فردية.

تفكير ناقد:

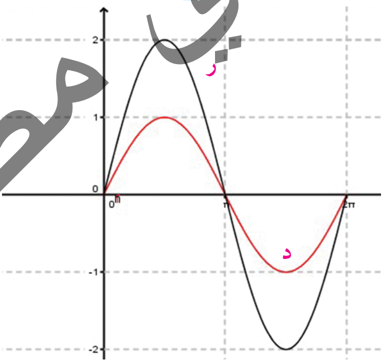
فى كل من الأشكال المقابلة:

صف التحويلات الهندسية لمنحنى الدالة د والتى ترسم منحنى الدالة ر، ثم اكتب قاعدة الدالة ر وحدد مداها وابحث اطرادها.

أ



ب



تمـــارين ١ – ٤

① ارسم منحنى الدالة د ، ومن الرسم حدد مداها وابحث اطرادها

أ $د(س) = \begin{cases} |س| & \text{عندما } س \leqslant ٠ \\ س^{٢} & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$

ب $د(س) = \begin{cases} ٤ & \text{عندما } س < -٢ \\ س^{٢} & \text{عندما } س \geqslant -٢ \end{cases}$

ج $د(س) = \begin{cases} س^{٣} & \text{عندما } س < ١ \\ ١ & \text{عندما } س > ١ \end{cases}$

د $د(س) = \begin{cases} \frac{١}{س} & \text{عندما } س < ٠ \\ |س| & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

② منحنى ر(س) = $س^{٢} + ٤$ هو نفس منحنى د(س) = $س^{٢}$ بازاحة مقدارها ٤ وحدات فى اتجاه:

أ $\overleftarrow{\text{و س}}$ ب $\overleftarrow{\text{و سَ}}$ ج $\overleftarrow{\text{و ص}}$ د $\overleftarrow{\text{و صَ}}$

③ منحنى ر(س) = $|س + ٣|$ هو نفس منحنى د(س) = $|س|$ بازاحة مقدارها ٣ وحدات فى اتجاه:

أ $\overleftarrow{\text{و س}}$ ب $\overleftarrow{\text{و سَ}}$ ج $\overleftarrow{\text{و ص}}$ د $\overleftarrow{\text{و صَ}}$

④ نقطة رأس المنحنى د(س) = $(٢ - س)^{٢} + ٣$ هي:

أ (٢، ٣) ب (٢، -٣) ج (-٢، ٣) د (-٢، -٣)

⑤ نقطة تماثل منحنى الدالة د حيث د(س)= $٢ - (س + ١)^{٣}$ هى :

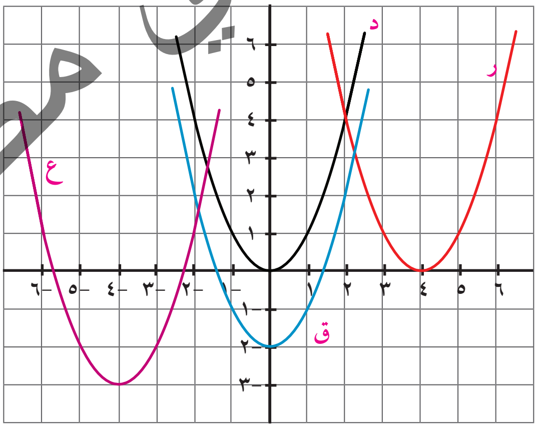
أ (١، ٢) ب (-١، ٢) ج (٢، ١) د (٢، -١)

⑥ نقطة تماثل منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س - ٣} + ٤$ هى:

أ (٣، -٤) ب (-٣، -٤) ج (٣، ٤) د (-٣، ٤)

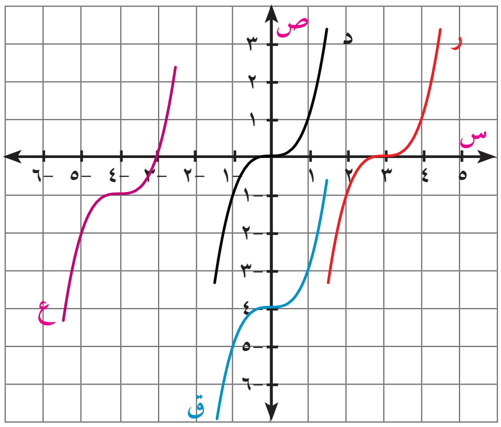
أجب عن مايأتى:

⑦ رسم منحنى الدالة د حيث د(س) = $س^{٢}$
ثم أزيح فى اتجاه محورى الإحداثيات س ، ص
كما فى الشكل المقابل.



اكتب قاعدة كل من الدوال الآتية:

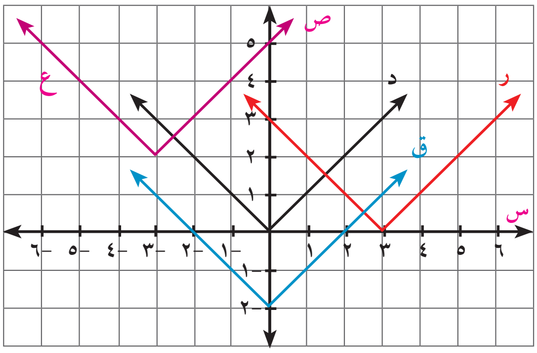
➢ ر ، ق ، ع



٨ في الشكل المقابل: رسم منحنى الدالة د، حيث د(س) = $س^{٣}$
ثم أزيح في اتجاه محوري الإحداثيات س ، ص

اكتب قاعدة كل من الدوال الآتية:

- ر ، ق ، ع



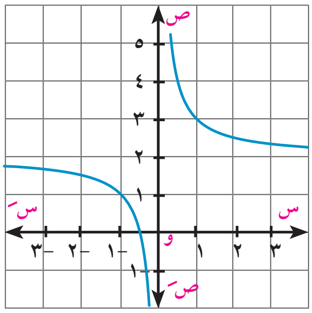
٩ في الشكل المقابل رسم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س|
ثم أزيح في اتجاه محوري الإحداثيات س ، ص

اكتب قاعدة كل من الدوال الآتية:

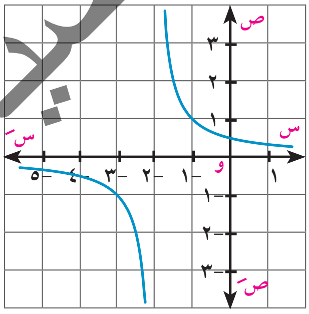
- ر ، ق ، ع

١٠ رُسم منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$، ثم أزيح في اتجاه محوري الإحداثيات س ، ص. اكتب قاعدة كل دالة التي تمثلها المنحنيات الآتية:

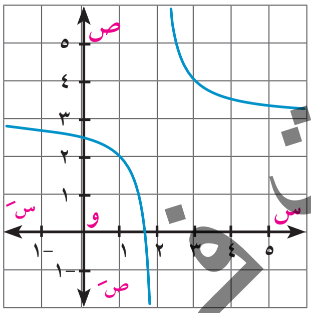
أ



ب



جـ



١١ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = $س^{٢}$ لتمثيل ما يأتي بيانيًّا.

أ $د_{١}(س) = س^{٢} - ٤$ ب $د_{٢}(س) = (س - ٣)^{٢}$ جـ $د_{٣}(س) = (س - ١)^{٢} - ٢$

١٢ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل مايأتى بيانيًّا:

أ $د_{١}(س) = |س| + ١$ ب $د_{٢}(س) = |س + ٢|$ جـ $د_{٣}(س) = |س - ٣| - ٢$

- **ثم أوجد إحداثيات نقط تقاطع المنحنيات مع المحورين.**

⑬ استخدم منحنى الدالة د حيث $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٣}$. لتمثيل ما يأتي بيانيًا:

أ $\text{د}_{١}(\text{س}) = \text{د}(\text{س}) - ٣$

ب $\text{د}_{٢}(\text{س}) = \text{د}(\text{س} - ٢)$

ج $\text{د}_{٣}(\text{س}) = \text{د}(\text{س} + ٣) + ٢$

➢ **ثم حدد نقطة التماثل لمنحنى كل دالة.**

⑭ إذا كانت الدالة د حيث $\text{د}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}}$ فارسم الشكل البيانى للدالة ق وحدد نقطة التماثل لمنحنى الدالة:

أ $\text{ق}(\text{س}) = \text{د}(\text{س} - ٣)$

ب $\text{ق}(\text{س}) = \text{د}(\text{س}) + ٢$

ج $\text{ق}(\text{س}) = \text{د}(\text{س} - ٢) + ٢$

⑮ استخدم منحنى الدالة د حيث $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٢}$ لتمثيل ما يأتي بيانيًا:

أ $\text{د}_{١}(\text{س}) = ٤ - \text{س}^{٢}$

ب $\text{د}_{٢}(\text{س}) = -(\text{س} - ٣)^{٢}$

ج $\text{د}_{٣}(\text{س}) = ٢ - (\text{س} + ٣)^{٢}$

⑯ استخدم منحنى الدالة د حيث $\text{د}(\text{س}) = |\text{س}|$ لتمثيل مايأتى بيانيًا.

أ $\text{د}_{١}(\text{س}) = ٢ - |\text{س}|$

ب $\text{د}_{٢}(\text{س}) = -|\text{س} + ٥|$

ج $\text{د}_{٣}(\text{س}) = ٤ - |\text{س} - ٢|$

د $\text{د}_{٤}(\text{س}) = ٢|\text{س}|$

هـ $\text{د}_{٥}(\text{س}) = -٢|\text{س} - ١|$

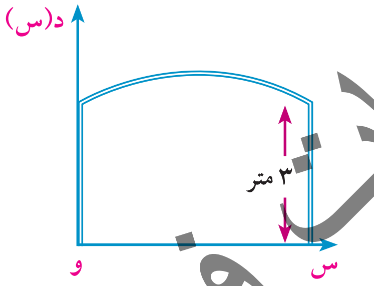
و $\text{د}_{٦}(\text{س}) = ٥ - ٢|\text{س} + ٢|$

⑰ ارسم منحنى الدالة د فى كل مماياتى باستخدام التحويلات المناسبة ثم ابحث اطرادها

أ $\text{د}_{١}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ٢ & \text{عندما } \text{س} \geqslant ٠ \\ -\text{س}^{٢} - ٢ & \text{عندما } \text{س} < ٠ \end{cases}$

ب $\text{د}_{٢}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ & \text{عندما } -٤ \leqslant \text{س} < ٠ \\ -\text{س}^{٢} - ١ & \text{عندما } ٠ \leqslant \text{س} \leqslant ٤ \end{cases}$

⑱ الربط مع الصناعة: صممت بوابة حديدية ارتفاع جانبيها ٣ أمتار وقوسها على شكل جزءًا من منحنى الدالة د: $\text{د}(\text{س}) = \text{أ}(\text{س} - ٢)^{٢} + ٤$ كما في الشكل المقابل. أوجد:



أ قيمة أ

ب أقصى ارتفاع للبوابة

ج عرض البوابة

⑲ الربط مع التجارة: يدفع تاجر غلال ٥٠ جنيهًا عن كل طن يدخل أو يخرج من مستودعه كأجر تحميل أو تنزيل، اكتب الدالة التى تمثل تكاليف التحميل أو التنزيل ومثلها بيانيًا.

⑳ المجتمعات العمرانية: خصصت قطع أراضي مستطيلة الشكل لإسكان الشباب بإحدى المجتمعات العمرانية الجديدة ، فإذا كان طول كل منها س متراً، ومساحتها ٤٠٠ متر مربع.

أ اكتب قاعدة الدالة د التى تبين عرض قطعة الأرض بدلالة طولها ومثلها بيانيًا.

ب أوجد من الرسم عرض قطعة الأرض التى طولها ٢٥ متراً وتحقق من ذلك جبريا.

الوحدة الأولى

١ - ٥

حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

Solving Absolute Value Equations and Inequalities

سوف تتعلم

- حل معادلات المقياس بيانيًّا
- حل معادلات المقياس جبريًّا
- حل متباينات المقياس بيانيًّا.
- حل متباينات المقياس جبريًّا
- نمذجة مشكلات وتطبيقات حياتية وحلها باستخدام معادلات ومتباينات المقياس

المصطلحات الأساسية

معادلة.	Equation
متباينة.	Inequality
حل بياني.	Graphical Solution

الأدوات المستخدمة

- ورق رسم بياني
- برامج رسومية للحاسوب.

أولًا: حل المعادلات

فكر و ناقش

مثل بيانيًّا فى شكل واحد منحنيى الدالتين د، ر حيث د دالة مقياس، ر دالة ثابتة.

لاحظ الرسم ثم اجب:

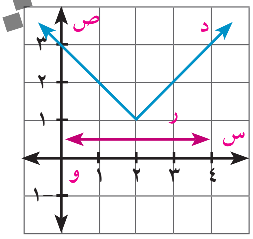
أ ما عدد نقط التقاطع المحتمل لمنحنيى الدالتين معًا؟

ب إذا وجدت نقط تقاطع للمنحنيين معًا، هل تحقق الأزواج المرتبة لها قاعدة كل من الدالتين ؟

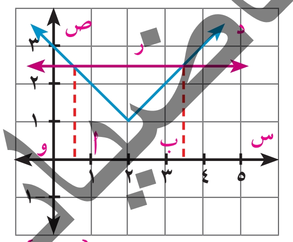
لاحظ أن:

١) عند نقط التقاطع (إن وجدت) يكون: د(س) = ر(س) ، والعكس صحيح لكل س تنتمى إلى المجال المشترك للدالتين.

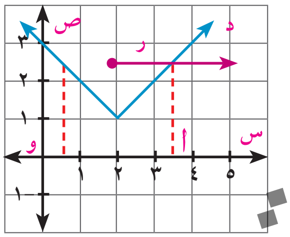
٢) لأى دالتين د، ر تكون مجموعة حل المعادلة د(س) = ر(س) هى مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنيهما كما توضحه الأشكال التالية:



مجموعة الحل = ϕ



مجموعة الحل = {أ، ب}



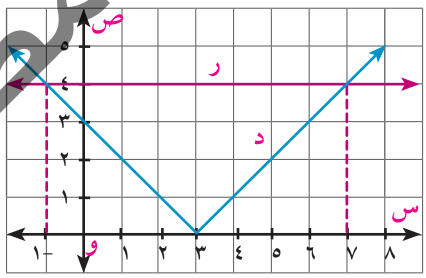
مجموعة الحل = {أ}

حل المعادلة: | أ س + ب | = جـ

مثال

١ حل المعادلة: |س - ٣| = ٤ بيانيًّا وجبريا.

الحل



بوضع د(س) = |س - ٣| ، ر(س) = ٤

١) نرسم منحنى الدالة د:د(س) = |س -٣|

بإزاحة منحنى د(س) = |س| ثلاث وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$

٢) على نفس الشكل نرسم ر(س) = ٤ ، حيث ر دالة ثابتة يمثلها مستقيم يوازى محور السينات ويمر بالنقطة (٠، ٤)

∵ المنحنيين يتقاطعان فى النقطتين (-١، ٤) ، (٧، ٤)

∴ مجموعة حل المعادلة هى: {-١ ، ٧}

الحل الجبرى:

من تعريف دالة المقياس: د(س) = $\begin{cases} \text{س - ٣} & \text{عندما س} \geqslant \text{٣} \\ \text{- س + ٣} & \text{عندما س} < \text{٣} \end{cases}$

عندما س > ٣ : س - ٣ = ٤ أى أن: س = ٧ ∈]٣ ، ∞[

عندما س ⩽ ٣ : - س + ٣ = ٤ أى أن: س = -١ ∈]- ∞ ، ٣]

مجموعة حل المعادلة هى: {- ١ ، ٧} وهذا يطابق الحل البياني.

حاول أن تحل

① حل كلًّا من المعادلات الآتية بيانيًّا وجبريًّا.

أ |س| - ٤ = ٠   ب |س| + ١ = ٠   جـ |س - ٧| = ٥

بعض خواص مقياس العدد *Properties of the Absolute Value*

تعلم

١) |أ ب| = |أ| × |ب| فمثلا:

|٢ × -٣| = |-٦| = ٦ ، |٢| × |-٣| = ٢ × ٣ = ٦

٢) |أ + ب| ⩽ |أ| + |ب|

ويحدث التساوى فقط إذا كان العددان أ ، ب لهما نفس الإشاره فمثلًا:

|٤ + ٥| = |٤| + |٥| = ٩ ، |-٤ - ٥| = |-٤| + |-٥| = ٩

٣) |أ - س| = |س - أ|

لاحظ:

١) إذا كان: |س| = أ فإن: س = أ أو س = -أ لكل أ ∈ ع+

٢) إذا كان: |أ| = |ب| فإن: أ = ب أو أ = - ب لكل أ ، ب ∈ ع

٣) |س|٢ = |س٢| = س٢

حل المعادلة: |أ س + ب| = |جـ س + ء|

مثال

② حل المعادلة |س - ٣| = |٢س + ١| بيانيًّا.

الحل

بوضع د(س) = |س - ٣| ، ر(س) = |٢ س + ١|

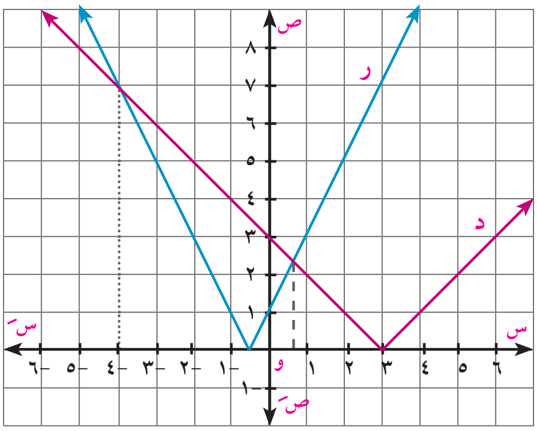
منحنى د: هو نفس منحنى |س| بإزاحة قدرها ٣ وحدات فى اتجاه و س ←

∵ ر(س) = |٢س +١| = |٢ (س + $\frac{١}{٢}$)|

∴ ر(س) = ٢ |س + $\frac{١}{٢}$ |

منحنى ر هو نفس منحنى ٢|س| بإزاحة أفقية قدرها $\frac{١}{٢}$ وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{وس}'}$ ، ويكون نقط تقاطع منحنيا الدالتين د ، ر هى: (-٤، ٧) ، ($\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٥}{٣}$)

مجموعة حل المعادلة هى {-٤ ، $\frac{٢}{٣}$ }



٩ حاول أن تحل

② حل كلًّا من المعادلات الآتية بيانيًّا.

أ |س + ٧| = |٢س + ٣|

ب |س – ٢| + |س - ١| = صفر

مثال

③ أوجد جبريًّا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

أ |س + ٧| = |س – ٥|

ب $\sqrt{\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٩}$ = |٩ – ٢س|

الحل

أ ∵ |س + ٧| = |س – ٥| ∴ س + ٧ = ± (س – ٥)

∴ س + ٧ = س – ٥ ∴ ٧ = - ٥ (غير ممكن).

أو س + ٧ = - س + ٥ **أى أن:** ٢س = - ٢

∴ س = - ١ **أى أن** مجموعة حل المعادلة هى { -١}

التحقيق:

بالتعويض عن س = - ١ فى طرفى المعادلة نجد أن:

الطرف الأيمن = الطرف الأيسر = ٦ **أى أن** مجموعة الحل هى { - ١}

ب ∵ $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩}$ = |٩ – ٢س|

∴ $\sqrt{(\text{س} - ٣)^{٢}}$ = |٩ – ٢س| **أى أن:** ∴ |س - ٣| = |٩ – ٢س|

ويكون : س - ٣ = ± (٩ - ٢س)

∴ س - ٣ = ٩ - ٢س ، ٣ س = ١٢ أى أن س = ٤

أو س - ٣ = -٩ + ٢ س ، س = ٦

بالتعويض عن قيم س فى طرفى المعادلة

عند س = ٤ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر = ١ ∴ س = ٤ حل للمعادلة

عند س = ٦ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر = ٣ ∴ س = ٦ حل للمعادلة

أى أن مجموعة حل المعادلة هى : **{ ٤، ٦}**

تذكر أن

إذا كان أ ، ب ∈ ع

وكان |أ| = |ب|

فإن: أ = ± ب

تذكر أن

لأي عدد حقيقي أ يكون:

$\sqrt{\text{أ}^{٢}}$ = |أ|

حاول أن تحل

③ أوجد جبريًّا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

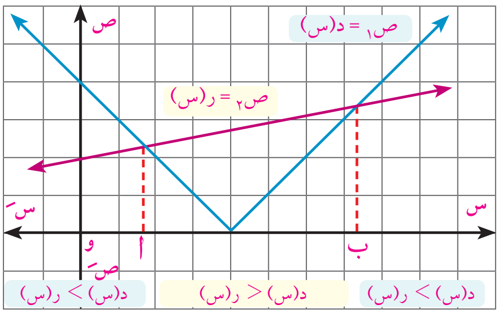
أ |س - ١| - ٢ |٢ - س| = ٠

ب $\sqrt{س^{٢} - ٤س + ٤} = ٤$

ثانيا: حل المتباينات *Solving the Inequalities*

سبق أن درست المتباينات، وعلمت أن المتباينة هى عبارة رياضية تحتوي أحد الرموز: (< أ ، > أ ، ≤ أ ، ≥) والمقصود بحل المتباينة هو إيجاد القيمة أو مجموعة القيم للمتغير التى تجعل المتباينة صحيحة.

حل المتباينات بيانيًّا



يبين الشكل المقابل منحنى كل من الدالتين د، ر حيث:

$ص_١$ = د(س) ، $ص_٢$ = ر(س) وتكون مجموعة حل المعادلة

د(س) = ر(س) هى {أ ، ب}

أى أن: $ص_١$ = $ص_٢$ عندما س = أ أو س = ب

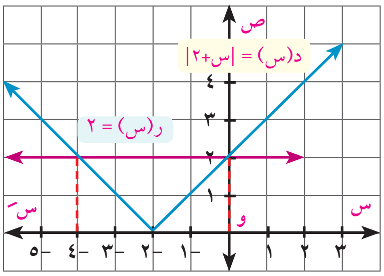
ويلاحظ: $ص_١$ < $ص_٢$ أى د(س) < ر(س) عندما س ∈]أ ، ب[

$ص_١$ > $ص_٢$ أى د(س) > ر(س) عندما س ∈]- ∞ ، أ[∪]ب ، ∞[

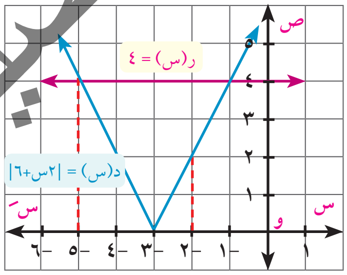
مثال

④

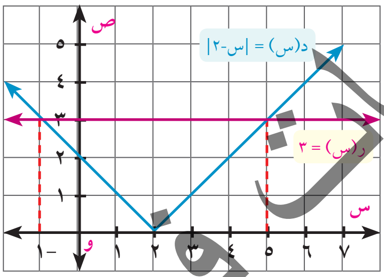
أ



ب



جـ



مجموعة حل المتباينة	مجموعة حل المتباينة	مجموعة حل المتباينة
|س+٢| < ٢	|٢س + ٦| ≥ ٤	|س - ٢| ≤ ٣
هى:]-٤ ، ٠[	هى:]-∞، -٥] ∪ [-١، ∞[	هى: [-١، ٥]
	أى أن: ع -]-٥ ، -١[	

حاول أن تحل

④ أوجد مجموعة حل كل من المتباينات التالية مستعينًا بالأشكال البيانية فى مثال (٧):

أ |س + ٢| ≤ ٢

ب |٢س + ٦| ≤ ٤

جـ |س - ٢| > ٣

حل المتباينات جبريًا

تعلم

أولاً: إذا كان |س| ≤ أ ، أ > ٠ **فإن:** -أ ≤ س ≤ أ

ثانيًا: إذا كان |س| ≥ أ ، أ > ٠ **فإن:** س ≥ أ **أو** س ≤ -أ

مثال

⑤ أوجد على صورة فترة مجموعة حل كل من المتباينات الآتية:

أ |س - ٣| < ٤ ب √(س^٢ - ٢س + ١) ≥ ٤

الحل

أ ∵ |س - ٣| < ٤ **أى** -٤ < س – ٣ < ٤ **وبإضافة ٣ إلى المتباينة**

∴ -٤ + ٣ < س – ٣ + ٣ < ٤ + ٣ **أى أن:** -١ < س < ٧

∴ **مجموعة الحل** =]-١ ، ٧[

ب ∵ √((س - ١)^٢) = |س - ١| **أى أن:** |س – ١| ≥ ٤

∴ س – ١ ≥ ٤ أى س ≥ ٥ أو س – ١ ≤ -٤ **أى** س ≤ -٣

س ∈ ع -]-٣ ، ٥[

∴ **مجموعة حل المتباينة هى**]-∞ ، -٣] ∪ [٥ ، ∞[

تذكر أن

لكل من أ ، ب ، جـ

إذا كان: أ < ب ، ب < جـ

فإن أ < جـ

إذا كان: أ < ب فإن

أ + جـ < ب + جـ

أ جـ < ب جـ عند جـ > ٠

أ جـ > ب جـ عند جـ < ٠

حاول أن تحل

⑤ أوجد على صورة فترة مجموعة حل كل من المتباينات الآتية:

أ |س - ٧| < ١١ ب |٣س + ٧| ≤ ٨ جـ √(س^٢ - ٦س + ٩) ≥ ٨

تفكير ناقد: اكتب على صورة متباينة القيمة المطلقة كل مماياتى:

أ -٤ ≤ س ≤ ٤ ب س ≤ -٢ ، س ≥ ٢ جـ ٠ < س < ٦

تطبيقات حياتية

مثال

الأرصاد الجوية

⑥ قامت محطة الأرصاد الجوية بتسجيل درجة الحرارة على مدينة القاهرة فى يوم ما فكانت ٣٢° باختلاف ٧° عن معدلها الطبيعى فى ذلك اليوم. كم تكون درجة الحرارة المحتملة لمدينة القاهرة فى ذلك اليوم ؟

الحل

بفرض أن درجة الحرارة المحتمل تسجيلها على مدينة القاهرة فى هذا اليوم = س°

.:. |س - ٣٢| = ٧ أى أن س - ٣٢ = ± ٧

ويكون س = ٣٢ + ٧ = ٣٩ أو س = ٣٢ - ٧ = ٢٥

أى أن درجة الحرارة المحتمل تسجيلها هى ٣٩° أو ٢٥°

حاول أن تحل

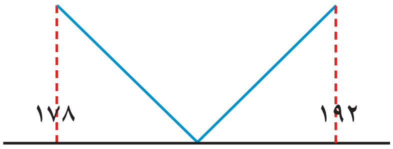
⑥ **الطب الرياضى:** يختلف وزن باسم عن الوزن الطبيعى لطوله بمقدار ٥ كيلو جرامات، ما الوزن المحتمل له إذا كان وزنه الطبيعى ٦٠ كيلو جرامًا؟

مثال

وظائف خالية

⑦ تسمح إحدى شركات الغاز الطبيعى بتوظيف قارئ العداد إذا كان طوله يتراوح بين ١٧٨سم ، ١٩٢ سم . عبر عن الأطوال الممكنة لمن يتقدم لشغل هذه الوظيفة بمتباينة القيمة المطلقة.

الحل



$$\frac{١٧٨ + ١٩٢}{٢} = ١٨٥$$

بفرض أن طول المتقدم لشغل الوظيفة = س سم

.:. ١٧٨ ≤ س ≤ ١٩٢

بإضافة -١٨٥ إلى أجزاء المتباينة

١٧٨ - ١٨٥ ≤ س - ١٨٥ ≤ ١٩٢ - ١٨٥

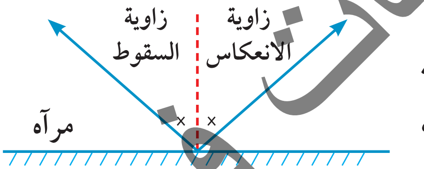
-٧ ≤ س - ١٨٥ ≤ ٧ أى أن |س - ١٨٥ | ≤ ٧

حاول أن تحل

⑦ اكتب متباينة القيمة المطلقة التى تعبر عن درجة طالب فى اختبار ما يتراوح بين ٦٠ ، ١٠٠ درجة

نشاط

استخدام الدوال فى حل مشكلات رياضية وحياتية

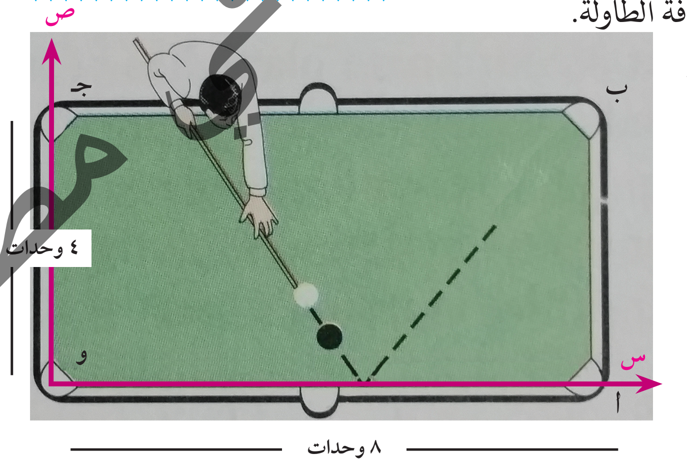


لاحظ أن: إذا سقط شعاع الضوء على سطح عاكس فإن مساره يخضع لدالة المقياس فيكون قياس زاوية السقوط مساويًا لقياس زاوية الانعكاس، كذلك مسار كرة البلياردو قبل وبعد تصادمها مع حافة الطاولة.

يوضح الشكل المقابل: تصويب لاعب البلياردو على الكرة السوداء، باعتبار $\overleftarrow{\text{و س}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ص}}$ محوري الإحداثيات المتعامدة، و أن مسار الكرة يتبع منحني الدالة د حيث: د(س) = $\frac{٤}{٣}$ |س-٥|

هل تسقط الكرة السوداء فى الجيب ب؟

فسر إجابتك رياضيًا.



مكتب مستشار الرياضيات فى مصر

تمارين الدرس الخامس

أكمل مايأتى:

① مجموعة حل المعادلة |س| = $\frac{١}{٢}$ هى ....

② مجموعة حل المعادلة |س| + ٣ = ٠ هى ....

③ مجموعة حل المتباينة |س – ٢| ≤ ٠ هى ....

اختر من القائمة التالية مجموعة الحل المناسبة لكل معادلة أو متباينة مماياتى:

④ |س – ٢| = ٣

⑤ |س- ٢| < ٣

⑥ |س – ٢| > -٣

⑦ |س - ٢| ≤ ٣

⑧ |س -٢| > ٣

⑨ |س - ٢| = - ٣

أ]-١ ، ٥[

ب ع

جـ {-١ ، ٥}

د ع - [-١، ٥]

هـ ϕ

و [-١ ، ٥]

أوجد جبريا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

⑩ |س + ٣| = ٦

⑪ |٢س - ٧| = ٥

⑫ |٣ – ٢س| = ٧

⑬ |س - ٣| = |س +١|

⑭ |٢س + ١| = |س - ٣|

⑮ $\sqrt{س^{٢} - ٢س + ١} = ٤$

أوجد بيانيًّا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

⑯ |س + ٤| = ٣

⑰ |س - ١| = |س +٣|

⑱ |٢س - ٥| = ٣

أوجد بيانيًّا مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية:

⑲ |س - ١| < ٣

⑳ |س - ٢| ≤ ٥

㉑ |س + ٣| > ٢

أوجد جبريًا مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية:

㉒ |٢س - ١| > ٣

㉓ |٢س + ٣| ≤ ٧

㉔ |٣س - ٧| ≥ ٢

㉕ شبكات الطرق: طريقان الأول يمثله منحنى الدالة د حيث د(س) = |س -٤| ، والثانى يمثله منحنى الدالة ر حيث ر(س) = ٣ ، إذا تقاطع الطريقان فى نقطتى أ ، ب أوجد المسافة بين أ ، ب علمًا بأن وحدة الأطوال تمثل كيلو مترًا واحدًا.

㉖ اكتب متباينة القيمة المطلقة التى تعبر عن درجة حرارة مقاسه بالترمومتر الطبى وتتراوح بين ٣٥° ، ٤٢°.

ملخص الوحدة

١ **الدالة:** هى علاقة بين مجموعتين غير خاليتين سـ ، صـ بحيث يكون لكل عنصر من عناصر سـ عنصراً وحيداً من عناصر صـ ، وتكتب رمزيًّا بالصورة $\text{د}: \text{سـ} \longrightarrow \text{صـ}$، وتتحدد الدالة بثلاثة عناصر هى: المجال، المجال المقابل، وقاعدة الدالة.

وتسمى الدالة د دالة حقيقية إذا كان كل من مجالها ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها.

٢ **اختبار الخط الرأسى:** إذا مثلت علاقة بمجموعة من النقاط فى مستوى احداثى متعامد وقطع الخط الرأسى عند كل عنصر من عناصر المجال تمثيلهما البيانى فى نقطة واحدة فقط فإن هذه العلاقة تمثل دالة.

٣ **دالة متعددة التعريف:** هى دالة حقيقية يكون لكل مجموعة جزئية من مجالها قاعدة تعريف مختلفة.

٤ **اطراد الدوال:** تكون الدالة **د تزايدية** فى الفترة]أ ، ب[إذا كان لكل س_1 ، $\text{س}_2 \in$]أ ، ب[، $\text{س}_2 > \text{س}_1$ فإن $\text{د}(\text{س}_2) > \text{د}(\text{س}_1)$:

وتكون **د تناقصية** فى الفترة]أ ، ب[إذا كان لكل س_1 ، $\text{س}_2 \in$]أ ، ب[، $\text{س}_2 > \text{س}_1$ فإن $\text{د}(\text{س}_2) < \text{د}(\text{س}_1)$

وتكون **د ثابتة** فى الفترة]أ ، ب[إذا كان لكل س_1، $\text{س}_2 \in$]أ ، ب[، $\text{س}_2 > \text{س}_1$ فإن $\text{د}(\text{س}_2) = \text{د}(\text{س}_1)$

٥ **الدالة الزوجية والدالة الفردية:**

الدالة الزوجية: يقال للدالة $\text{د}: \text{سـ} \longrightarrow \text{صـ}$ أنها دالة زوجية إذا كان $\text{د}(-\text{س}) = \text{د}(\text{س})$ لكل س ، $-\text{س} \in \text{سـ}$.

الدالة الفردية: يقال للدالة $\text{د}: \text{سـ} \longrightarrow \text{صـ}$ أنها دالة فردية إذا كان $\text{د}(-\text{س}) = -\text{د}(\text{س})$ لكل س ، $-\text{س} \in \text{سـ}$.

خواص هامة:

إذا كان كل من: د_1 ، د_2 دالة زوجية ، وكان كل من: ر_1، ر_2 دالة فردية ، فإن:

١) $\text{د}_1 + \text{د}_2$ دالة زوجية

٢) $\text{ر}_1 + \text{ر}_2$ دالة فردية.

٣) $\text{د}_1 \times \text{د}_2$ دالة زوجية

٤) $\text{ر}_1 \times \text{ر}_2$ دالة زوجية.

٥) $\text{د}_1 \times \text{ر}_2$ دالة فردية

٦) $\text{د}_1 + \text{ر}_2$ ليست زوجية وليست فردية.

٦ **الدالة الخطية:** أبسط صورها: $\text{د}(\text{س}) = \text{س}$ ويمثلها خط مستقيم يمر بالنقطة (٠ ، ٠) وميله = ١

٧ **الدالة التربيعية:** أبسط صورها $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^2$ ، نقطة رأس المنحنى هى (٠، ٠)، معادلة محور التماثل س = ٠

٨ **الدالة التكعيبية:** أبسط صورها $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^3$ ، نقطة تماثل منحنيها هى (٠، ٠)

٩ **دالة المقياس: (القيمة المطلقة)**

أبسط صورة لدالة المقياس هى $\text{د}(\text{س}) = |\text{س}|$، وتعرف على النحو التالى:

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} ، & \text{س} \geq 0 \\ -\text{س} ، & \text{س} < 0 \end{cases}$$

ويمثلها شعاعان يبدأ من النقطة (٠، ٠) ميل أحدهما = ١ وميل الآخر = -١ ويكون:

$$|\text{س}| \geq 0 ، \quad |-\text{س}| = |\text{س}| ، \quad \sqrt{\text{س}^2} = |\text{س}|$$

١٠ الدالة الكسرية: أبسط صورها هى د(س) = $\frac{١}{س}$ ، نقطة تماثل منحنيها هى (٠، ٠)

١١ التحويلات الهندسية للدالة د، حيث ص = د(س)، ا > ٠ تحدد بالآتي:

- إذا كانت ص = د(س) + ا فإنها تمثل بإزاحة منحنى د فى الاتجاه الموجب لمحور الصادات بمقدار ا
- إذا كانت ص = د (س) - ا فإنها تمثل بإزاحة منحنى د فى الاتجاه السالب لمحور الصادات بمقدار ا
- إذا كانت ص = د(س + ا) فإنها تمثل بإزاحة منحنى د فى الاتجاه السالب لمحور السينات بمقدار ا
- إذا كانت ص = د (س - ا) فإنها تمثل بإزاحة منحنى د فى الاتجاه الموجب لمحور السينات بمقدار ا
- إذا كانت ص = د(-س) فإنها تمثل بانعكاس منحنى د فى محور السينات.
- إذا كانت ص = ا د(س) فإنها تمثل بتمدد رأسى لمنحنى د إذا كان ا > ١

وانكماش رأسى لمنحنى د إذا كان ٠ < ا < ١

١٢ خواص مقياس العدد:

أ | ا ب | = |ا| × |ب|

ب | ا + ب | ≤ |ا| + |ب|

جـ إذا كان |س| ≤ ا ، ا > ٠ فإن: -ا ≤ س ≤ ا

د إذا كان |س| ≥ ا ، ا > ٠ فإن: س ≥ ا أو س ≤ -ا

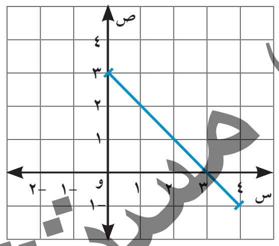
١٣) حل المعادلة : لأى دالتين د، ر تكون مجموعة حل المعادلة د(س) = ر(س) هى مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنيهما .

١٤) حل المتباينة : هو إيجاد مجموعة قيم المتغير التى تجعل المتباينة صحيحة.

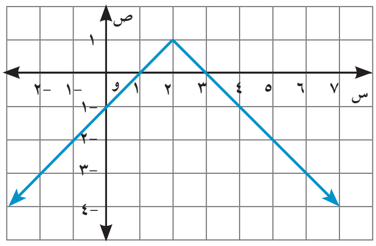
تمـــاريـن عامة

① فى الأشكال البيانية الآتية عين مدى الدالة، وابحث اطرادها ثم بين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك:

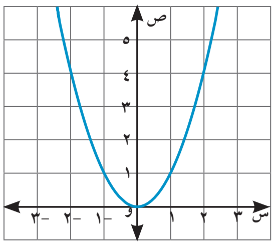
أ



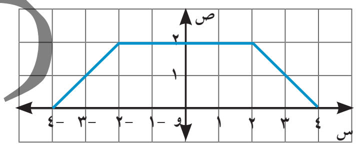
ب



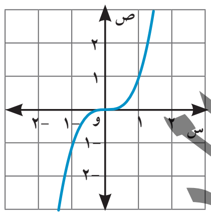
ج



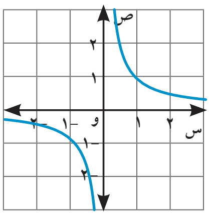
د



هـ



و



② أوجد مجال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية:

أ $د_{١}(س) = ٢س^{٣} + س + ٣$
ب $د_{٢}(س) = \frac{٢س}{س^{٢} - ٢س - ٣}$
ج $د_{٣}(س) = \frac{س^{٢} - ١}{س^{٢} + ١}$

③ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل الدالة ر بيانيًا ثم ابحث اطرادها:

أ $ر(س) = |س - ١|$
ب $ر(س) = ٢ - |س|$
ج $ر(س) = |س + ٢| - ٣$

④ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = $س^{٢}$ لتمثيل مايأتى بيانيًا:

أ $ر_{١}(س) = س^{٢} - ٣$
ب $ر_{٢}(س) = ٢ - س^{٢}$
ج $ر_{٣}(س) = (س - ٢)^{٢} + ١$

ثم أوجد معادلة محور التماثل لكل منها.

⑤ استخدم منحنى الدالة د، حيث د(س) = $س^{٣}$ لتمثيل مايلي بيانيًا:

أ $ر_{١}(س) = (س + ٣)^{٣}$
ب $ر_{٢}(س) = -(س - ١)^{٣}$
ج $ر_{٣}(س) = (س - ١)^{٣} - ٢$

ثم عين نقطة تماثل منحنى الدالة .

⑥ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠ لتمثيل ما يلي بيانيًا:

أ $د_{١}(س) = \frac{١}{س} + ١$
ب $د_{٢}(س) = \frac{١}{س} - ٢$
ج $د_{٣}(س) = \frac{١}{س - ٢}$
د $د_{٤}(س) = \frac{١}{س + ٣}$
هـ $د_{٥}(س) = \frac{١}{س - ٢} + ١$
و $د_{٦}(س) = \frac{٢س - ١}{س}$

⑦ أوجد مجموعة حل المعادلات والمتباينات الآتية بيانيًّا .

أ $|س - ٥| = ٣$ ب $|س - ٥| < ٣$ ج $|س + ٣| \geqslant ٢$

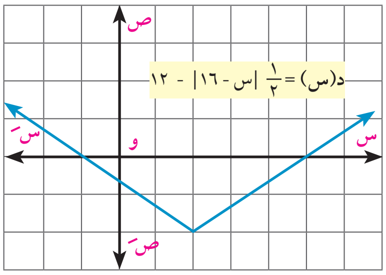
د $|س - ١| = |س + ٤|$ هـ $|س + ٤| \leqslant ٢$ و $\sqrt{س^{٢} + ٢س + ١} > ٣$

⑧ أوجد مجموعة حل المعادلات والمتباينات الآتية جبريًا:

أ $|س - ٣| = ٤$ ب $|٢س - ٣| = ٥$ ج $|٢س - ٥| \leqslant ٧$

د $|٥ - س| > ٣$ هـ $|س - ١| = |٢س + ٣|$ و $|س - ٢| - ٣ > ٠$

⑨ ينتج مصنع ألبان عبوات وزن كل منها س جم ولمراقبة جودة الانتاج تمر العبوة على سير مراقبة الوزن الذي يسمح بمرورها إذا كان $|س - ١٦٠٠| \leqslant ١٥$ حدد أكبر وزن وأصغر وزن للعبوة التي يمكن طرحها فى الأسواق ومن إنتاج هذا المصنع.



⑩ يوضح الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث:

$$د(س) = \frac{١}{٢}|س - ١٦| - ١٢$$

اختر الوحدات المناسبة للمحورين $\overleftarrow{و س}$ ، $\overleftarrow{و ص}$

ثم أوجد مجموعة حل المعادلة $د(س) = ٦$ بيانيًّا

تفكير ابداعى:

⑪ إذا كان مجموعة حل المتباينة $|س| \geqslant أ$ هى ϕ ماهى القيم الممكنة للعدد أ؟ وما هى مجموعة حل المتباينة $|س| > أ$ عندئذ.

⑫ تقاس سرعة الطيران لطائرة أثناء الجزء العادى للطيران أى بدون مرحلتى الاقلاع والهبوط . عبر بمتباينة القيمة المطلقة عن سرعة طيران طائرة تتراوح بين ٧٠٠ كم/ساعة ، ٩٠٠ كم/ساعة.

اختبار تراكمى

① ارسم منحنى الدالتين د، ر حيث د(س) = س + ١ ، ر(س) = ٥ - س ومن الرسم أوجد:

أ إحداثيي نقط تقاطع كل منهما مع محورِ السينات.

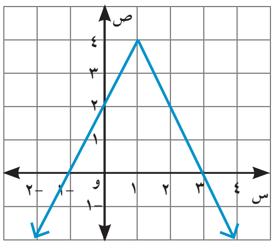
ب إحداثيي نقطة تقاطع المنحنيين.

جـ مساحة المثلث المحدد بالمستقيمين المتقاطعين ومحور السينات.

② استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل الدالة ر حيث ر(س) = |س-١| - ٢ ثم أوجد مدى الدالة ر.

③ ارسم منحنى الدالة د حيث: د(س) = $\begin{cases} س^{٢} & \text{لكل } -٢ \leqslant س < ٢ \\ ٦ & \text{لكل } ٢ \leqslant س \end{cases}$

◄ ومن الرسم عين مدى الدالة وابحث إطرادها.



④ فى الشكل المقابل:

أ اكتب إحداثيي نقطة رأس المنحنى.

ب اكتب قاعدة الدالة.

جـ أوجد مدى الدالة وابحث إطرادها.

د اكتب معادلة محور التماثل.

⑤ ارسم منحنى الدالة د حيث د(س) = $(س-١)^{٣}$ واستنتج من الرسم مدى الدالة واطرادها وبين نوعَها من حيث كونها زوجيةً أو فرديةً أو غير ذلك.

⑥ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$ لتمثيلِ الدالة ر حيث ر(س) = د(س) + ٢ ثم اكتبْ نقطةَ تماثلِ الدالة الناتجة وابحث اطرادها.

⑦ إذا كانت الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س+١}$. أوجد مجال الدالة د ونقطة التماثل لمنحنى هذه الدالة. حل المعادلة د($\frac{١}{س}$) = ٤

⑧ أوجد بيانيًّا مجموعةَ حل كل من

أ |س - ٤| = ٣

ب |س - ٤| ⩾ ٣

⑨ أوجد جبريًّا مجموعةَ حل كل من المعادلات والمتباينات الآتيةِ:

أ |س + ٥| = ٩

ب $\sqrt{٤س^{٢} - ١٢س + ٩}$ = |س + ١|

جـ |٢س - ٥| ⩽ ٧

د |٣س + ١| > ٧

الوحدة الثانية

الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

Exponents, Logarithms and their Applications

مقدمة الوحدة

أُدخل مفهوم اللوغاريتمات إلى الرياضيات فى أوائل القرن السابع عشر، على يد العالم جون نابير، كوسيلة لتبسيط الحسابات؛ ليعتمد عليها بعد ذلك الملاحون والعلماء والمهندسون وغيرهم لإنجاز حساباتهم بسهولة أكبر ، مستخدمين المسطرة الحاسبة، والجداول اللوغاريتمية، كما استفادوا من خواص اللوغاريتمات باستبدال عمليات الضرب لإيجاد لوغاريتم حاصل ضرب عددين بخاصية الجمع وفق الخاصية لوم (س ص) = لوم س + لوم ص، ويرجع الفضل فى ذلك للعالم ليونهارت أويلر فى القرن الثامن عشر الذى قام بربط مفهوم اللوغاريتم بمفهوم الدالة الأسية ليتوسع فى مفهوم اللوغاريتمات ويرتبط بالدوال.

ويستفاد من المقياس اللوغاريتمى فى مجالات واسعة، فعلى سبيل المثال الديسيبل هو وحدة لوغاريتمية لقياس شدة الصوت، ونسبة الڤولت، كما يستخدم الأس الهيدروجينى (وهو مقياس لوغاريتمى) فى الكيمياء لتحديد حمضية محلولٍ ما.

مخرجات تعلم الوحدة

في نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف الدالة الأسية.
- يتعرف التمثيل البيانى للدالة الأسية، ويستنتج خواصها.
- يتعرف قوانين الأسس الكسرية.
- يحل معادلة أسية على الصورة : $أ^{س} = ب$.
- يتعرف الدالة اللوغاريتمية.
- يحول جبريًّا من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية والعكس.
- يتعرف التمثيل البيانى للدالة اللوغاريتمية فى فترات محدودة، ويستنتج خواصها.
- يستنتج العلاقة بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية بيانيًّا.
- يتعرف قوانين اللوغاريتمات.
- يحل معادلات لوغاريتمية.
- يحل مسائل تشتمل على تطبيق قوانين اللوغاريتمات.
- يتعرف اللوغاريتمات المعتادة للأساس ١٠.
- يوجد قيمة اللوغاريتمات باستخدام الآلة الحاسبة.
- يستخدم الآلة الحاسبة في حل بعض المعادلات الأسية .

المصطلحات الأساسية

القوة النونية	The n^{th} Power
الأساس	Base
الأس	Exponent
جذر نونى	n^{th} Root
أس كسرى	Rational – Exponent
دالة أسية.	Expontential Function
نمو إسى.	Exponential Growth
تضاؤل أسى.	Exponential Decay
مجال	Domain
مدى	Range
انعكاس	Reflection
لوغاريتم	Logarithm
معادلة لوغاريتمية.	Logarithmic Equation
دالة لوغاريتمية	Logarithmic Function

دروس الوحدة

٢ – ١: الأسس الكسرية

٢ – ٢: الدالة الآسية وتمثيلها البيانى وتطبيقاتها

٢ – ٣: حل المعادلات الأسية

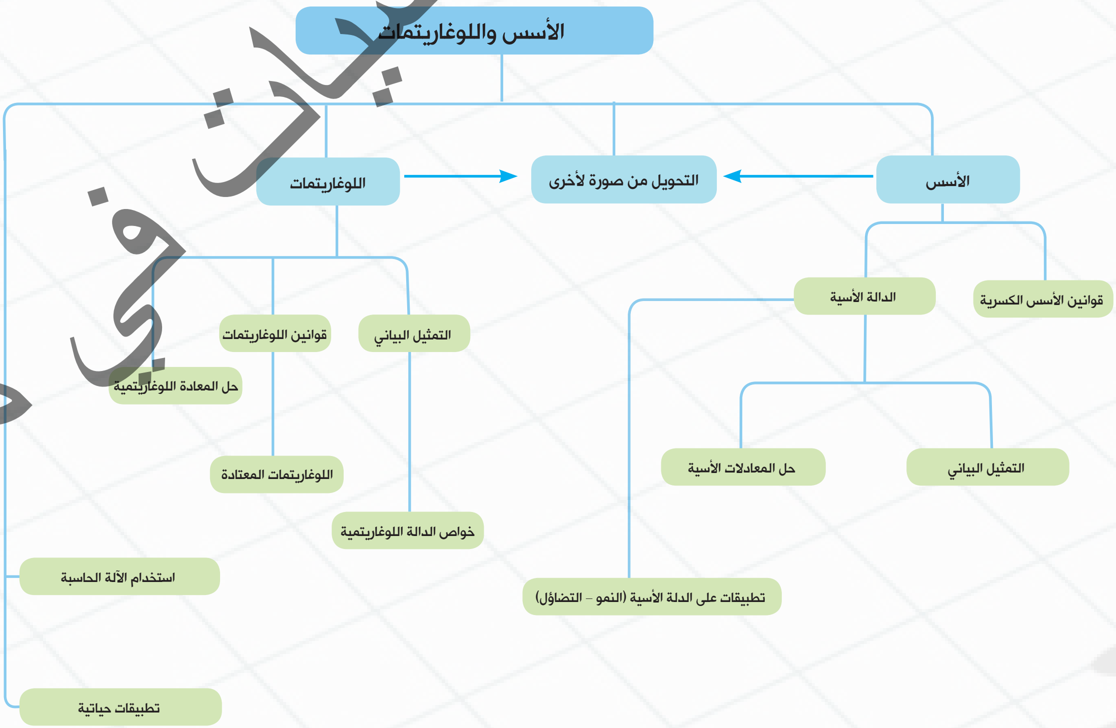
٢ – ٤: الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البيانى

٢ – ٥: بعض خواص اللوغاريتمات

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية - برامج رسومية geogebra-graph

مخطط تنظيمى للوحدة


الأسس واللوغاريتمات
الأسس
التحويل من صورة لأخرى
اللوغاريتمات
قوانين الأسس الكسرية
الدالة الأسية
التمثيل البياني
حل المعادلات الأسية
تطبيقات على الدلة الأسية (النمو - التضاؤل)
التمثيل البياني
قوانين اللوغاريتمات
حل المعادلة اللوغاريتمية
اللوغاريتمات المعتادة
خواص الدالة اللوغاريتمية
استخدام الآلة الحاسبة
تطبيقات حياتية

الوحدة الثانية

٢ - ١

الأسس الكسرية

Rational Exponents

سوف تتعلم

- تعميم قوانين الأسس.
- الجذر النوني.
- قوانين الأسس الكسرية.

المصطلحات الأساسية

القوة النونية	The n^{th} Power
الأساس	Base
الأس	Exponent
جذر نوني	n^{th} Root
أس كسرى	Rational Exponent

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية

تمهيد

سبق أن درست الجذور التربيعية لعدد حقيقي غير سالب، وتعرفت على بعض خواص الجذور التربيعية والتكعيبية، ودرست الأسس الصحيحة وتعرفت على بعض خواصها، وسوف تتعرف في هذا الدرس على الأسس الكسرية.

تعلم

الأسس الصحيحة:

تعريف

١) لكل أ ∈ ع ولكل ن ∈ ص^{+} فإن:

$\text{أ}^{\text{ن}} = \text{أ} \times \text{أ} \times \text{أ} \times \ldots\ldots \times \text{أ}$ (حيث العامل أ مكرر ن من المرات)

ويسمى ($\text{أ}^{\text{ن}}$) **بالقوة النونية** للعدد أ، حيث يسمى العدد أ **بالأساس**، والعدد ن **بالأس** ونقول أ **مرفوع** للأس ن.

٢) $\text{أ}^{\text{صفر}} = ١$ لكل أ ∈ ع - {٠}

٣) $\text{أ}^{-١} = \frac{١}{\text{أ}}$ ، $\text{أ}^{-\text{ن}} = \frac{١}{\text{أ}^{\text{ن}}}$ أ ≠ ٠

خواص الأسس الصحيحة:

لكل م، ن ∈ ص ، أ، ب ∈ ع ، ب ≠ ٠ فإن:

- $\text{أ}^{\text{م}} \times \text{أ}^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{م}+\text{ن}}$
- $(\text{أ}\,\text{ب})^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{ن}}\,\text{ب}^{\text{ن}}$
- $\frac{\text{أ}^{\text{م}}}{\text{أ}^{\text{ن}}} = \text{أ}^{\text{م}-\text{ن}}$
- $\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{ن}} = \frac{\text{أ}^{\text{ن}}}{\text{ب}^{\text{ن}}}$
- $(\text{أ}^{\text{م}})^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{م}\text{ن}}$

مثال

① أوجد في أبسط صورة المقدار الآتي = $\frac{(٨)^{-٣} \times (١٨)^{٢}}{٨١ \times (١٦)^{-٣}}$

الحل

$$\text{المقدار} = \frac{(٢^{٣})^{-٣} \times (٢ \times ٣^{٢})^{٢}}{٣^{٤} \times (٢^{٤})^{-٢}} = \frac{٢^{-٩} \times ٢^{٢} \times ٣^{٤}}{٣^{٤} \times ٢^{-٨}}$$

$$= ٢^{-٩+٢+٨} \times ٣^{٤-٤}$$

$$= ٢^{١} \times ٣^{٠} = ٢ \times ١ = ٢$$

مكتبة مستشار الرياضيات في مصر

حاول أن تحل

① أوجد فى أبسط صورة قيمة المقدار: $\frac{(٢٧)^{-٣} \times (١٢)^{٢}}{١٦ \times (٨١)^{-٣}}$

② أثبت أن : $\frac{٢^{س} \times ٩^{س+١}}{٣ \times ١٨^{س}} = ٣$

تعلم

الجذر النونى *The n^{th} Root*

علمت أن الجذر التربيعى لعدد ما هو عملية عكسية لتربيع ذلك العدد، وبالمثل فإن الجذر النونى لعدد هو العملية العكسية لرفع هذا العدد للقوة (ں).

مثال:

١ إذا كانت $س^{٣} = ٨$ فإن ٢ هو الجذر التكعيبى للعدد ٨ أى أن $\sqrt[٣]{٨} = ٢$

٢ إذا كانت $س^{٥} = ٣٢$ فإن ٢ هو الجذر الخامس للعدد ٣٢ أى أن $\sqrt[٥]{٣٢} = ٢$

٣ إذا كانت $س^{ں} = أ$ فإن س هو الجذر النونى للعدد أ أى أن $\sqrt[ں]{أ} = س$

تعريف ١

لأى عدد حقيقي $أ \geqslant ٠$، $ں \in ص^{+} - \{١\}$ **يكون** $أ^{\frac{١}{ں}} = \sqrt[ں]{أ}$

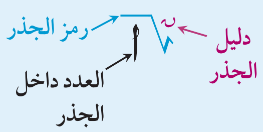
هذه العلاقة صحيحة أيضًا عندما $أ < ٠$، ں عدد صحيح فردى أكبر من ١

مثال:

$(١٦)^{\frac{١}{٤}} = \sqrt[٤]{١٦} = ٢$ $\qquad$ $(-٩)^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{-٩} \not\in ع$

$-(٢٧)^{\frac{١}{٣}} = -\sqrt[٣]{٢٧} = -٣$ $\qquad$ $(-٢٤٣)^{\frac{١}{٥}} = \sqrt[٥]{-٢٤٣} = -٣$

لاحظ أن



مثال

② إذا كانت $س^{ں} = أ$ فأوجد قيم س فى ع (إن وجدت) فى كُلٍّ من الحالات الآتية:

أ $ں = ٥$ ، $أ =$ صفر $\qquad$ ب $ں = ٤$ ، $أ = ٨١$

جـ $ں = ٢$ ، $أ = -٤$ $\qquad$ د $ں = ٣$ ، $أ = -٨$

الحل

أ **عندما** $ں = ٥$، $أ =$ صفر فإن $س^{٥} = ٠$ **وتكون** $س = \sqrt[٥]{٠} = ٠$

ب **عندما** $ں = ٤$ ، $أ = ٨١$ فإن $س^{٤} = ٨١$ **وتكون** $س = \pm \sqrt[٤]{٨١} = \pm ٣$

جـ **عندما** $ں = ٢$ ، $أ = -٤$ فإن $س^{٢} = -٤$ **وتكون** $س = \pm \sqrt{-٤} \not\in ع$

د **عندما** $ں = ٣$ ، $أ = -٨$ فإن $س^{٣} = -٨$ **وتكون** $س = \sqrt[٣]{-٨} = -٢$

نستنتج من المثال السابق أن:

إذا كانت $\text{س}^{\text{ن}} = \text{أ}$ فإن قيم س التى تحقق المعادلة تتضح من الجدول التالى:

ن	أ	$\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}}$
$\text{ن} \in \text{ص}^{+} - \{١\}$	$\text{أ} = ٠$	$\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}}$ = صفر
عدد صحيح زوجى موجب	$\text{أ} > ٠$	يوجد جذران حقيقيان هما $\pm \sqrt[\text{ن}]{\text{أ}}$
عدد صحيح زوجى موجب	$\text{أ} < ٠$	لاتوجد جذور حقيقية.
عدد صحيح فردى موجب، $\text{ن} \neq ١$	$\text{أ} \in \text{ح}$	يوجد جذر حقيقي واحد فقط هو $\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}}$

؟ حاول أن تحل

③ أوجد قيم س في كل مما يأتي (إن وجدت) :

أ $\text{س}^{٢} = ٣٦$ **ب** $\text{س}^{٥} = -٣٢$ **ج** $\text{س}^{٣} = ١٢٥$

د $\text{س}^{٤} = ١٢٩٦$ **هـ** $\text{س}^{٢} = -٤٩$ **و** $\text{س}^{٧} = -١٢٨$

④ تفكير ناقد: وضح بمثال عددى الفرق بين الجذر السادس للعدد أ وبين $\sqrt[٦]{\text{أ}}$

تعريف

إذا كان $\text{ن} \in \text{ص}^{+} - \{١\}$، $\text{م} \in \text{ص}^{+}$، $\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}} \in \text{ح}$ فإن: $\text{أ}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{أ}^{\text{م}}} = (\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}})^{\text{م}}$

مثال:

$(١٦)^{\frac{٣}{٢}} = (\sqrt{١٦})^{٣} = (٤)^{٣} = ٦٤$

$\sqrt[٣]{(-١٢٥)^{٢}} = (\sqrt[٣]{(-١٢٥)})^{٢} = (-٥)^{٢} = ٢٥$

مثال

③ أوجد فى أبسط صورة كُلًّا من:

أ $-\sqrt[٣]{٨\text{أ}^{٦}\text{ب}^{٩}}$ **ب** $\pm\sqrt{٦٤(\text{أ}^{٢}+٣)^{٦}}$

الحل

أ $-\sqrt[٣]{٨\text{أ}^{٦}\text{ب}^{٩}} = -\sqrt[٣]{(٢\text{أ}^{٢}\text{ب}^{٣})^{٣}} = -٢\text{أ}^{٢}\text{ب}^{٣}$

ب $\pm\sqrt{٦٤(\text{أ}^{٢}+٣)^{٦}} = \pm\sqrt{[٨(\text{أ}^{٢}+٣)^{٣}]^{٢}}$

$= \pm ٨(\text{أ}^{٢}+٣)^{٣}$

؟ حاول أن تحل

⑤ أوجد فى أبسط صورةٍ كُلًّا من:

أ $\sqrt[٤]{٦٢٥\text{أ}^{١٢}}$ **ب** $\sqrt[٥]{-٢٤٣\text{ب}^{٥}}$ **ج** $\sqrt[٧]{١٢٨(\text{أ}+\text{ب})^{٧}}$

استخدام المقياس *Using The Modulus*

يستخدم مِقياس العدد إذا كان دليل الجذر (ن) عددًا زوجيًّا فيكون $\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}^{\text{ن}}} = |\text{أ}|$، أما إذا كان دليل الجذر عددًا فرديًّا فلا داعى لاستخدام المقياس.

$$\sqrt[\text{ن}]{\text{س}^{\text{ن}}} = \begin{cases} |\text{س}| & \text{إذا كان ن زوجيًّا.} \\ \text{س} & \text{إذا كان ن فرديًّا.} \end{cases}$$

مثال

④ أوجد ناتج كل مما يأتي فى أبسط صورةٍ :

- أ $\sqrt{٩\text{س}^{٢}}$
- ب $\sqrt[٣]{-٨\text{س}^{٣}}$
- جـ $\sqrt[٤]{(٢ - \sqrt{٣})^{٤}}$
- د $\sqrt[٦]{(١ - \sqrt{٧})}$

لاحظ أن

مربع أى من العددين (أ) أو (-أ) هو $\text{أ}^{٢}$

الحل

- أ $\sqrt{٩\text{س}^{٢}} = \sqrt{(٣\text{س})^{٢}} = |٣\text{س}|$
- ب $\sqrt[٣]{-٨\text{س}^{٣}} = \sqrt[٣]{(-٢\text{س})^{٣}} = -٢\text{س}$
- جـ $\sqrt[٤]{(٢ - \sqrt{٣})^{٤}} = |٢ - \sqrt{٣}| = ٢ - \sqrt{٣}$ حيث $٢ > \sqrt{٣}$
- د $\sqrt[٦]{(١ - \sqrt{٧})} = |١ - \sqrt{٧}| = \sqrt{٧} - ١$ حيث $\sqrt{٧} > ١$

حاول أن تحل

⑥ أوجد ناتج كل مما يأتي فى أبسط صورةٍ:

- أ $\sqrt[٤]{١٦\text{أ}^{١٢}}$
- ب $\sqrt[٦]{(\text{س} - ٢)^{١٨}}$
- جـ $\sqrt[٣]{(٢ - \sqrt{٥})^{٣}}$
- د $\sqrt[٤]{(٢ - \sqrt{٥})^{٤}}$

تعريف ٤

إذا كان ن $\in$ ص$^{+}$ - {١}، م $\in$ ص$^{+}$، $\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}} \in$ ح فإن: $\text{أ}^{-\frac{\text{م}}{\text{ن}}} = \frac{١}{\text{أ}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}}$

مثال: $٧^{-\frac{٣}{٥}} = \frac{١}{٧^{\frac{٣}{٥}}}$ ، $\frac{١}{٤^{-\frac{٢}{٣}}} = ٤^{\frac{٢}{٣}}$

تعريف ٥

إذا كان ن $\in$ ص$^{+}$ - {١}، $\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}}$ ، $\sqrt[\text{ن}]{\text{ب}}$ عددين حقيقيين فإن:

- $\sqrt[\text{ن}]{\text{أ ب}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{أ}} \times \sqrt[\text{ن}]{\text{ب}}$
- $\sqrt[\text{ن}]{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}} = \frac{\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}}}{\sqrt[\text{ن}]{\text{ب}}}$ حيث ب ≠ صفر

مثال

⑤ أوجد فى أبسط صورة كُلًّا من:

أ $\frac{\sqrt{٨} \times ٤^{-١} \times ٢^{-\frac{٣}{٢}}}{٦^{-٢} \times ٣^{٢}}$

ب $\frac{٣٢^{-\frac{٣}{٥}} \times ٨^{\frac{٢}{٣}}}{\sqrt[٤]{٤} \times \sqrt[٨]{١٦^{٥}}}$

الحل

أ المقدار $= \frac{٨^{\frac{١}{٢}} \times ٤^{-١} \times ٢^{-\frac{٣}{٢}}}{٦^{-٢} \times ٣^{٢}}$ تحويل الجذور إلى أسسٍ كسرية.

$= \frac{(٢^{٣})^{\frac{١}{٢}} \times (٢^{٢})^{-١} \times ٢^{-\frac{٣}{٢}}}{(٣ \times ٢)^{-٢} \times ٣^{٢}}$ تحليل كل أساس إلى عوامله الأولية.

$= \frac{(٢)^{\frac{٣}{٢}} \times ٢^{-٢} \times ٢^{-\frac{٣}{٢}}}{٣^{-٢} \times ٢^{-٢} \times ٣^{٢}}$ بالتبسيط

$= ٢^{\frac{٣}{٢} - ٢ - \frac{٣}{٢} + ٢} \times ٣^{٢ - ٢}$

$= ٢^{\text{صفر}} \times ٣^{\text{صفر}} = ١$

ب المقدار $= \frac{٣٢^{\frac{٣}{٥}} \times ٨^{\frac{٢}{٣}}}{٤^{\frac{١}{٤}} \times ١٦^{\frac{٥}{٨}}}$ تحويل الجذور إلى أسسٍ كسرية.

$= \frac{(٢^{٥})^{\frac{٣}{٥}} \times (٢^{٣})^{\frac{٢}{٣}}}{(٢^{٢})^{\frac{١}{٤}} \times (٢^{٤})^{\frac{٥}{٨}}}$ تحليل كل أساس إلى عوامله الأولية.

$= \frac{٢^{٣} \times ٢^{٢}}{٢^{\frac{١}{٢}} \times ٢^{\frac{٥}{٢}}} = ٢^{٣ + ٢ - \frac{١}{٢} - \frac{٥}{٢}} = ٢^{٢} = ٤$

؟ حاول أن تحل

⑦ أوجد فى أبسطِ صورة كُلًّا من :

أ $\frac{\sqrt[٣]{٢٤٣} \times \sqrt{٨^{-١}}}{\sqrt{٢} \times \sqrt[٣]{٩}}$

ب $\frac{\sqrt[٤]{٤} \times \sqrt[٥]{٢}}{\sqrt{٢} \times \sqrt[١٠]{٤}}$

حل المعادلات:

مثال

⑥ أوجد فى ح مجموعة حل كُلٍّ من المعادلات الآتية:

أ $س^{\frac{٢}{٣}} = ٩$

ب $(س + ١)^{\frac{٣}{٤}} = ٨$

الحل

أ $\because س^{\frac{٢}{٣}} = ٩$ برفع الطرفين للقوة ٣

$\therefore (س^{\frac{٢}{٣}})^{٣} = ٩^{٣}$

$\therefore س^{٢} = ٩^{٣}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$\sqrt{س^{٢}} = \sqrt{٩^{٣}}$ $\therefore |س| = ٣^{٣}$ $\therefore س = \pm ٢٧$

ب $(س + ١)^{\frac{٣}{٤}} = ٨$ **برفع الطرفين للقوة ٤** ∴ مجموعة الحل = $\{٢٧، -٢٧\}$

∴ $(س + ١)^{٣} = ٨^{٤}$

∴ $(س + ١) = (\sqrt[٣]{٨})^{٤}$

∴ $س + ١ = ٢^{٤}$ ∴ $س = ١٥$ ∴ مجموعة الحل = $\{١٥\}$

؟ حاول أن تحل

⑧ أوجد في ع مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية :

أ $س^{\frac{٥}{٢}} = ٣٢$ **ب** $\sqrt[٣]{(س-١)^{٥}} = \frac{١}{٣٢}$

مثال

⑦ **الربط بالهندسة:** إذا كان ل طول ضلع المربع الذى مساحته م يعطى بالعلاقة $ل = م^{\frac{١}{٢}}$

أ احسب طول ضلع المربع الذى مساحته ٢٥سم^{٢}

ب احسب طول ضلع المربع الذى مساحته ١٧سم^{٢} مقربًا الناتج لرقمٍ عشرى واحد.

الحل

أ $ل = ٢٥^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٢٥} = ٥$سم **ب** $ل = ١٧^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{١٧} \simeq ٤,١٢٣١٠$

وبالتقريب لرقم عشرى واحد ∴ $ل \simeq ٤,١$سم

؟ حاول أن تحل

⑨ إذا كان ل طول ضلع مكعبٍ حجمُه ع يعطى بالعلاقة $ل = ع^{\frac{١}{٣}}$ أوجد طول ضلع المكعب الذى حجمه ٢٧

تمــــاريـن ٢ – ١

① **اكتب كُلًّا ممايأتى على صورةٍ أسية:**

أ $\sqrt[٣]{س}$ **ب** $\sqrt[٤]{أ^{٣}}$ **ج** $٢\sqrt[٣]{ل}$

د $\sqrt[٤]{أ^{٢}ب^{٣}}$ **هـ** $\sqrt[٦]{س^{٥}}$ **و** $\frac{\sqrt[٣]{س}}{\sqrt[٥]{س^{٢}}}$

② **اكتب كُلًّا ممايأتى على صورة جذرية:**

أ $أ^{\frac{١}{٢}}$ **ب** $ب^{\frac{٢}{٣}}$ **ج** $٦ ص^{\frac{٣}{٤}}$

د $٨ ب^{\frac{٤}{٩}}$ **هـ** $(٣ س)^{-\frac{٢}{٣}}$ **و** $٥^{\frac{١}{٢}}$

③ **أوجد قيمة كلٍّ ممايأتى فى أبسط صورة:**

أ $(١٦)^{\frac{٣}{٤}}$ **ب** $(-٣٢)^{\frac{٣}{٥}}$ **ج** $٢٧^{-\frac{٤}{٣}}$

د $(\frac{١}{٨})^{\frac{٢}{٣}} + (\frac{١}{٤})^{\frac{١}{٢}}$ **هـ** $\frac{\sqrt[٤]{٤}}{\sqrt{٢}}$ **و** $\frac{١}{(٢^{-٢} \times ٤^{\frac{١}{٢}} \times ٨^{\frac{٢}{٣}})^{-٢}}$

٤ أوجد فى أبسط صورة ناتجَ العمليات لآتية:

أ $(أ^{-\frac{٢}{٣}})^{-٣}$ **ب** $\sqrt[٣]{س} \times س^{\frac{١}{٢}}$ **ج** $(٣^{٢} + ٤^{٢})^{\frac{١}{٢}}$

د $(س^{\frac{١}{٢}} + ص^{\frac{١}{٢}})\,(س^{\frac{١}{٢}} - ص^{\frac{١}{٢}})$ **هـ** $(س^{\frac{١}{٣}} - ص^{\frac{١}{٣}})\,(س^{\frac{٢}{٣}} + س^{\frac{١}{٣}} ص^{\frac{١}{٣}} + ص^{\frac{٢}{٣}})$

و $(س^{\frac{١}{٢}} + س^{-\frac{١}{٢}})^{٢}$ **ز** $(١^{٣} + ٢^{٣} + ٣^{٣})^{\frac{١}{٢}}$

٥ اختصر كُلًّا ممايأتى لأبسط صورة :

أ $\sqrt[٥]{٢٤٣} + \sqrt[٩]{٥١٢}$ **ب** $(\frac{١٦}{٨١})^{\frac{١}{٢}} \times (\frac{٧٢٩}{٨})^{\frac{١}{٣}}$ **ج** $(١٦)^{\frac{٣}{٢}} \div (٨)^{\frac{٢}{٣}}$

د $(٢٧)^{\frac{٢}{٣}} - (٦٤)^{\frac{٥}{٦}}$ **هـ** $\sqrt{٠,١} \times \sqrt[٣]{٠,٢١٦} \times \sqrt{٢,٥}$ **و** $\frac{٨^{\frac{٣}{٨}} \times ٤^{\frac{-٣}{١٦}}}{٢^{\frac{-٥}{٤}}}$

ز $(١٢٥)^{\frac{٢}{٣}} \times ٨١^{\frac{١}{٤}} \times (١٥)^{-١}$ **ح** $\frac{١٦^{س - \frac{١}{٤}} \times ٩^{س + \frac{١}{٢}}}{٨^{س - ١} \times ١٨^{س + ٢}}$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

٦ إذا كان $\sqrt[٣]{س^{٢}} = ٩$ فإن س $\in$

أ $\{٢٧\}$ **ب** $\{٢٧، -٢٧\}$ **ج** $\{١\}$ **د** ϕ

٧ $٦٤^{-\frac{١}{٦}} =$

أ ٢ **ب** -٢ **ج** $\frac{١}{٢}$ **د** $-\frac{١}{٢}$

٨ $\sqrt[٣]{س^{-٣}} =$

أ $س^{-١}$ **ب** $-س$ **ج** $|س^{-١}|$ **د** $-|س|$

٩ $\sqrt[٤]{س^{٤} ص^{٨}} =$

أ $س ص^{٢}$ **ب** $\pm س ص^{٢}$ **ج** $|س| ص^{٢}$ **د** $|س ص^{٢}|$

١٠ إذا كان $س^{-\frac{٣}{٢}} = ٨$ فإن س =

أ ٤ **ب** -٤ **ج** $\frac{١}{٤}$ **د** $-\frac{١}{٤}$

١١ $\frac{٦^{-\frac{١}{٥}} \times ٦^{\frac{٣}{٥}}}{\sqrt[٥]{٣٦}} =$

أ ١ **ب** ٦ **ج** $\frac{١}{٦}$ **د** $\sqrt{٦}$

١٢ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $\text{س}^{\frac{١}{٢}} = ٥$ ب $\text{س}^{\frac{٧}{٢}} = \frac{١}{١٢٨}$ ج $\sqrt{\text{س}^{٣}} = ٢٧$

د $(\text{س} - ٥)^{\frac{٥}{٢}} = ٣٢$ هـ $٣\,\text{س}^{-\frac{٣}{٤}} = \frac{٣}{٨}$ و $٢^{٣\text{س} - ١} = \frac{١٦}{\sqrt{٢}}$

١٣ الربط بالاقتصاد: إذا علم أن الفائدة (ر) لأحد البنوك على مبلغ وقدرُه (أ) بعد (ن) سنة تعطى بالعلاقة ر = $(\frac{\text{جـ}}{\text{أ}})^{\frac{١}{\text{ن}}}$ -١ حيث جـ جملة المبلغ بعد ن سنة . فإذا أودع جمال مبلغ ١٠٠٠٠ جنيه وبعد ٣ سنوات أصبح جملة المبلغ ١٢٥٩٧، أوجد النسبة المئوية السنوية للفائدة.

١٤ اكتشف الخطأ:

أ إذا كان $\text{س}^{\frac{٢}{٣}} = ٤$، فإن س = ٨   ب $\sqrt[٤]{\text{س}^{٤}} = \text{س}$

١٥ اختصر المقدار: $\frac{\sqrt{\text{أ}}}{\text{أ}\sqrt[٣]{\text{أ}}}$

١٦ نشاط:

استخدم الآلة الحاسبةَ فى تبسيط إجراء العمليات الآتية (مقربًا الناتج لرقمين عشريين):

أ $٧٥\,(١,٢١)^{\frac{١٩}{٢}}$ ب $\frac{\sqrt[٥]{٢^{-١}} \times \sqrt[٣]{٧^{-٢}}}{\sqrt{٤^{-٣}}}$

١٧ الربط بالتجارة: بدأ محمد مشروع تربية الأرانب، فإذا كان عدد الأرانب فى بداية المشروع هو ٧٥ أرنبًا وكان عدد الأرانب فى تكاثرها يتبع العلاقة ع = $٧٥\,(٤,٢٢)^{\frac{\text{ن}}{٦}}$ حيث ن عدد الأشهر. أوجد العدد المتوقع للأرانب بعد مرور ٥ أشهر.

١٨ الربط بالحجوم: إذا كان طول ضلع المكعب ل يتحدد بالعلاقة ل = $\sqrt[٣]{\text{ع}}$ حيث ع حجم المكعب بالوحدات المكعبة .أوجد طول ضلع مكعب حجمُه ١٣٣١سم٣

تفكير إبداعى:

١٩ الربط بالحجوم: إذا كان نصف طول قطر كرة نق حجمها ع يعطى بالعلاقة نق = $\sqrt[٣]{\frac{٣\text{ع}}{٤\pi}}$.

أ أوجد طول نصف قطر كرةٍ حجمُها ٢٧٠٠٠سم^{٣}.

ب احسب التغير فى حجم الكرة عند زيادة طول نصف القطر إلى الضعف.

٢ - ٢ الدالة الآسية وتطبيقاتها

Exponential Function and its Application

سوف تتعلم

- الدالة الأسية.
- تمثيل الدوال الأسية بيانيًّا.
- خواص الدالة الأسية.

المصطلحات الأساسية

دالة أسية.	*Expontential Function*
نمو أسى.	*Exponential Growth*
تضاؤل أسى.	*Exponential Decay*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية

أضف إلى معلوماتك

تسمى الدالة الأسية $د(س)= أ^{س}$ فى حالة $أ > ١$ بدالة النماء (*growth function*) وترتبط بكثير من التطبيقات الحياتية مثل التزايد السكانى والفائدة المركبة للبنوك.
وتسمى الدالة الأسية $د(س) = أ^{س}$ فى حالة $٠ < أ < ١$ بدالة التضاؤل (*decay*) وترتبط بكثير من التطبيقات مثل فترة عمر النصف للذرات المشعة .

تمهيد

كثيرًا ما نتعامل فى حياتنا عن أمور تتطلب حسابات دقيقة مثل الفوائد البنكية والزيادة السكانية وتكاثر الخلايا فى بعض الكائنات وفترات عمر النصف للذرات المشعة وغيرها، وتلك هذه الأمور تتطلب مفهوم الدالة الأسية التى سوف نتناولها فى هذا الدرس ونعرض بعض خواصها .

تعلم

لاحظ أن

الدالة الجبرية : يكون المتغير المستقل (س) هو الأساس أما الأس فهو عدد حقيقى.

الدالة الأسية : يكون المتغير المستقل (س) هو الأس أما الأساس فهو عدد حقيقى موجب لايساوى الواحد.

الدالة الأسية *Exponential Function*

تعريف

إذا كان أ عددًا حقيقيًّا موجبًا ≠ ١ فإن الدالة:
د حيث $د: ع \longrightarrow ع^{+}$ ، $د(س) = أ^{س}$
تسمى **دالة أسية** اساسها أ

تعبير شفهى: وضح لماذا لاتمثل الدالة $د(س) = (-٣)^{س}$ حيث س ∈ ع دالة أسية

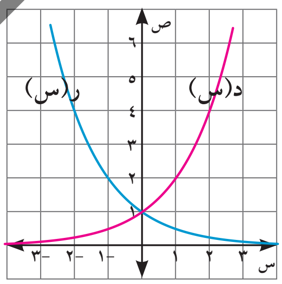
التمثيل البيانى للدالة الأسية *Graphical Representation of the Exponential Function*

مثال

① بالاستعانة بقيم س ∈ [-٣، ٣] ارسم فى شكل واحد جزءًا من منحنى كل من الدالتين:
$د(س) = ٢^{س}$ ، $ر(س) = (\frac{١}{٢})^{س}$

الحل

س	٣-	٢-	١-	٠	١	٢	٣
د(س)	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤	٨
ر(س)	٨	٤	٢	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$



من الرسم يمكن استنتاج الخواص الآتية للدالة الأسية

١ الدالة د: $د(س) = ٢^{س}$ متزايدة على مجالها لأن ($أ > ١$)
الدالة ر : $ر(س) = (\frac{١}{٢})^{س}$ متناقصة على مجالها لأن ($٠ < أ < ١$)

٢ مدى كل من الدالتين هو $ع^{+}$

٣ منحنى الدالة د: $د(س) = ٢^{س}$ هو صورة منحنى الدالة ر: $ر(س) = (\frac{١}{٢})^{س}$ بالانعكاس فى محور الصادات.

حاول أن تحل

① بالاستعانة بقيم س ∋[-٢ ، ٢] ارسم فى شكلٍ واحدٍ منحنى كُلٍّ من الدوال $د_{١}(س) = ٢^{س}$، $د_{٢}(س) = ٣^{س}$ ، $د_{٣}(س) = ٤^{س}$

مثال

② إذا كانت $د(س) = ٣^{س}$ فأكمل مايأتى :

أ د(٢) = ...

ب د (س +٢) = ... × $٣^{س}$

ج د(س) × د(-س) = ...

الحل

أ $د(٢) = ٣^{٢} = ٩$

ب $د(س +٢) = ٣^{س+٢} = ٣^{س} × ٣^{٢} = ٩ × ٣^{س}$

ج $د(س) × د(-س) = ٣^{س} × ٣^{-س} = ٣^{س-س} = ٣^{صفر} = ١$

تطبيقات على الدالة الأسية:

أولاً: النمو الأسى *Exponential Growth*

يمكن استخدام الدالة د حيث $د(ن) = أ(١ + ر)^{ن}$ لتمثيل النمو الأسى لكمية أ بنسبة مئوية ثابتة ر فى فترات زمنية متساوية عددها ن . (ناقش معلمك فى استنتاج هذه العلاقة):

الربح المركب:

عند حساب جـ جملة مبلغ أ مستثمر فى احد البنوك التى تعطى ربح سنوى مركب ر (نسبة مئوية) لعدد ن من السنوات بفترات تقسيم العائد السنوى إلى س فترة فإن جملة المبلغ تعطى بالعلاقة :

$$جـ = أ\left(١ + \frac{ر}{س}\right)^{ن س}$$

③ أودع رجل مبلغ ٥٠٠٠ جنيه فى أحد البنوك التى تُعطى فائدة سنويةً مركبةً قدرُها ٨٪، أوجد جملة المبلغ بعد مرور عشرة أعوام فى كُلٍّ من الحالات الآتية:

أ العائد سنوى.

ب العائد ربع سنوى.

ج العائد شهرى.

الحل

باستخدام العلاقة $جـ = أ\left(١ + \frac{ر}{س}\right)^{ن س}$ حيث س التقسيم السنوى:

أ العائد سنوى ∴ س = ١

$جـ = ٥٠٠٠ (١ + ٠,٠٨)^{١٠} = ١٠٧٩٤,٦٢$ جنيه

ب العائد ربع سنوى ∴ س = ٤

$جـ = ٥٠٠٠ \left(١ + \frac{٠,٠٨}{٤}\right)^{١٠ × ٤} = ١١٠٤٠,٢$ جنيه

جـ العائد شهرى　　　$\therefore$ س = ١٢

$جـ = ٥٠٠٠ \left(١ + \frac{٠,٠٨}{١٢}\right)^{١٠ \times ١٢} = ١١٠٩٨,٢$ جنيه

حاول أن تحل

② أودع رجل مبلغ ١٠٠٠ جنيه فى أحد البنوك التى تعطى فائدة سنوية مركبة قدرها ٥٪، أوجد جملة المبلغ بعد مرور ٨ سنوات فى كل من الحالات الآتية:

أ العائد سنوى.　　**ب** العائد نصف سنوى.　　**جـ** العائد شهرى.

ثانيًا: التضاؤل الأسى　*Exponential Decay*

يمكن استخدام الدالة د: $د(ن) = أ(١ - ر)^{ن}$ والتي أساسها أقل من الواحد وأكبر من الصفر لتمثيل التضاؤل الأسى بنسبةٍ مئويةٍ ثابتة قدرُها ر فى فترات زمنية متساوية، عددها ن.

مثال

④ إذا بلغ أقصى إنتاج لمنجم من الذهب فى السنة هو ١٨٥٠ كجم، وأخذ هذا الإنتاج فى التناقص سنويًّا بنسبة ٩٪.

أ اكتب دالة أسية تمثل انتاج الذهب من هذا المنجم بعد ن سنة.

ب قدر لأقرب كجم إنتاج المنجم بعد مرور ٨ سنوات.

الحل

$أ = ١٨٥٠$　　،　　$ر = ٠,٠٩$

أ دالة التضاؤل الأسى $د(ن) = (أ - ر)^{ن}$

$د(ن) = ١٨٥٠ (١ - ٠,٠٩)^{ن}$

ب بعد مرور ٨ سنوات (بالتعويض عن ن = ٨)

$\therefore د(٨) = ١٨٥٠ (١ - ٠,٠٩)^{٨} \simeq ٨٧٠$ كجم

حاول أن تحل

③ إذا كان السعر السوقى لسيارة يتناقص طبقًا للعلاقة $س = ١٥٠٠٠٠ (٠,٩٤)^{ن}$ حيث س سعر السيارة بالجنيه ن الزمن بالسنوات من لحظة شرائها. أوجد:

أ سعر السيارة عند شرائها جديدة.　　**ب** سعر السيارة بعد مرور ٣ سنوات من شرائها.

تمـاريـن ٢ – ٢

① ارسم الشكل البيانى لكل من الدوال الآتية، ثم أوجد المجال والمدى لكل منها وبين: أى منها تكون متزايدة وأى منها متناقصة

أ $د(س) = ٢^{س}$ ب $د(س) = ٣^{س}$ ج $د(س) = (\frac{١}{٢})^{س}$ د $د(س) = ٢^{-س+١}$

② أكمل مايأتى:

أ الدالة د : $د(س) = ٢^{س}$ تقطع محور الصادات فى النقطة ....

ب الدالة د: $د(س)=٢^{١-س}$ تقطع محور الصادات فى النقطة ....

ج إذا مر منحنى الدالة د: $د(س) = أ^{س}$ بالنقطة (١، ٣) فإن أ = ...

د منحنى الدالة د : $د(س) = ٣^{س}$ هو صورة منحنى الدالة ر : $ر(س) = (\frac{١}{٣})^{س}$ بالانعكاس فى ....

هـ الدالة د حيث $د(س) = أ^{س}$ تكون تناقصية إذا كان أ ∋ ....

و الدالة د حيث $د(س) = (٢أ)^{س}$ تكون متزايدة عندما أ ∋ ....

③ الربط بالسكان: إذا كان عدد سكان إحدى الدول فى نهاية عام ٢٠٠٠ هو ٤٣٢٦٥٣٤١ نسمة، وكان معدل الزيادة السكانية فى السنة يُساوى ١,٥٪ :

أ أوجد صيغةً تمثل عدد السكان لهذه الدولة بعد مرور ن سنة من عام ٢٠٠٠.

ب استخدم هذه الصيغة لإيجاد عددِ السكان المتوقع لهذه الدولة عام ٢٠٢٠، وذلك إذا استمرت الزيادة بنفس المعدل.

④ الربط بالاستثمار: إذا استثمر رجل مبلغ مليون جنيه في مشروعٍ، بحيث ينمو هذا المبلغ تبعًا لدالةٍ أسية بزيادة سنوية قدرُها ٦٪، أوجد :

أ صيغةً توضحُ نماء هذا المبلغ بعد ن سنة.

ب قدر هذا المبلغ بعد مرور ١٠ سنوات.

⑤ أوجد جملة مبلغ ٨٠٠٠ جنيه موضوع فى بنك يُعطى فائدة سنويةً مركبة قدُرها ٥٪ لمدة ٧ سنوات.

⑥ الربط بالثروة السمكية : إذا كان عدد أسماك السلمون فى إحدى البحيرات يتزايد تبعًا لدالة النمو الأسى د : $د(ن) = ٢٠٠ (١,٠٣)^{ن}$ حيث ن عدد الأسابيع أوجد عدد أسماك السلمون فى هذه البحيرة بعد مرور ٨ أسابيع.

⑦ إذا كانت $د(س)= ٥^{س+١}$ أثبت أن $\frac{د(س) \times د(س - ١)}{د(س-٢) \times د(س+١)} = ١$

٢ - ٣

حل المعادلات الأسية

Solving Power Equations

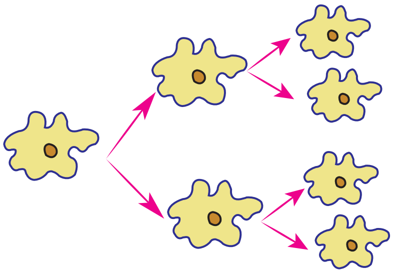
سوف تتعلم

- الدالة الأسية.
- تمثيل الدوال الأسية بيانيًّا.
- خواص الدالة الأسية.

المصطلحات الأساسية

معادلة أسية.	Power Equation
حل بيانى.	Graphical Solution

فكر و ناقش



تتكاثر الأميبا بطريقة الانقسام الثنائي بحيث تنقسم الخلية الواحدة إلى خليتين بعد فترة زمنية ثابتة، ثم تنقسم كل خلية جديدة إلى خليتين بعد نفس الفترة الزمنية، وفي نفس الشروط وهكذا .....

١ أوجد عدد الخلايا الناتجة من خلية واحدة بعد ٩ فترات زمنية.

٢ أوجد عدد الفترات الزمنية اللازمة لإنتاج ٨١٩٢ خلية من هذه الخلية.

تعلم

المعادلة الأسية *Power Equation*

إذا تضمنت المعادلة متغيرًا في الأس فإنها تسمى معادلة أسية مثل ($٢^{س+١} = ٨$)

حل المعادلات الأسية :

أولًا: إذا كان $أ^{م} = أ^{ن}$ حيث $أ \notin \{٠، ١، -١\}$ فإن $م = ن$.

مثال

① أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $٢^{س+٣} = ٨$

ب $٣^{س-٢} = \left(\frac{١}{٢٧}\right)^{س}$

الحل

أ $\because ٢^{س+٣} = ٨$ $\therefore ٢^{س+٣} = ٢^{٣}$

$\therefore س + ٣ = ٣$ ومنها س = صفر

$\therefore$ مجموعة الحل = {صفر}

ب $\because ٣^{س-٢} = \left(\frac{١}{٢٧}\right)^{س}$ $\therefore ٣^{س-٢} = ٣^{-٣س}$

$\therefore س - ٢ = -٣س$ $\therefore س + ٣س = ٢$

$\therefore ٤س = ٢$ ومنها $س = \frac{١}{٢}$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{\frac{١}{٢}\}$

الأدوات المستخدمة

- إلة حاسبة علمية
- برامج رسومية

مكتبة مستشار الرياضيات في مصر

حاول أن تحل

① أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلاتِ الآتيةِ:

أ $٥^{س+١} = ٢٥$

ب $٢^{١-س^٢} = \frac{١}{٨}$

ثانيًا: إذا كان $أ^م = ب^م$ حيث أ، ب $\not\ni$ {٠، ١، -١}،

إما: م = صفر

أو: أ = ب عندما م عدد فردي.

أ = ± ب عندما م عددزوجي.

مثال

② أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلاتِ الآتيةِ:

أ $٣^{س+٢} = ٧^{س+٢}$

ب $٤^{س-٢} = ٣^{٢س-٤}$

الحل

أ ∵ $٣^{س+٢} = ٧^{س+٢}$

∴ س + ٢ = صفر ومنها س = -٢

∴ مجموعة الحل = {-٢}

ب ∵ $٤^{س-٢} = ٣^{٢س-٤}$ ∴ $٤^{س-٢} = ٣^{٢(س-٢)}$

∴ $٤^{س-٢} = ٩^{س-٢}$

∴ س - ٢ = صفر ومنها س = ٢

∴ مجموعة الحل = {٢}

حاول أن تحل

② أوجد في ع مجموعة حل المعادلة:

أ $٥^{س-١} = ٤^{س-١}$

ب $٢^{٢س-٦} = ٧^{س-٣}$

مثال

③ إذا كانت د(س) = $٢^{س+١}$ أوجد قيمة س التي تحقق د(س) = ٣٢

الحل

∵ د(س) = ٣٢ ∴ $٢^{س+١} = ٣٢$

∴ $٢^{س+١} = ٢^٥$ ∴ س + ١ = ٥

∴ س = ٤ ∴ مجموعة الحل = {٤}

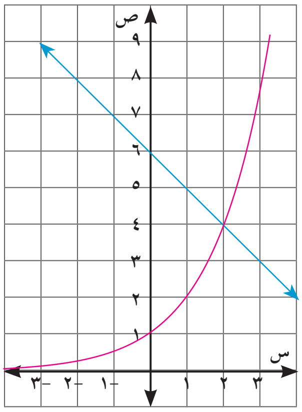
حاول أن تحل

③ إذا كانت د(س) = $٧^س$، أوجد قيمة س التي تحقق د(س+١) = ٤٩

حل المعادلات الأسية بيانيًّا: *Solving the Exponential Equations Grophically*

مثال

④ ارسم في شكل واحد المنحنى البياني لكل من الدالتين $د_1$ حيث $د_1(س) = ٢^{س}$، $د_2$ حيث $د_2(س) = ٦ - س$ ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة $٢^{س} = ٦ - س$



الحل

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
$٢^{س}$	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤	٨
٦ - س	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣

من الرسم: الإحداثي السيني لنقطة التقاطع يساوي ٢

∴ مجموعة حل المعادلة = {٢}

حاول أن تحل

④ باستخدام أحد البرامج الرسومية (geogebra) ارسم في شكلٍ واحدٍ كُلًّا من الدالتين $د_1(س) = ٢^{س+١}$، $د_2(س) = ٣$ ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة $٢^{س+١} = ٣$.

مثال

⑤ **الربط بالأحياء:** يتكاثر أحد الكائنات الدقيقة بطريقة الانقسام الثنائي بحيث تتضاعف عدد هذه الكائنات كل ساعة نتيجة انقسام كل خلية إلى خليتين، فإذا كان عدد الخلايا عند بداية القياس ٢٠ ألف خلية أوجد:

أ عدد الخلايا بعد مرور ٥ ساعات.

ب بعد كم ساعة يصبح عدد الخلايا ٢ مليون و ٥٦٠ ألف خلية.

الحل

يمكن كتابة عدد الخلايا على صورة دالةٍ أسية.

$د(ن) = ب\,(أ)^{ن}$

$= ٢٠٠٠٠\,(٢)^{ن}$ حيث ن عدد الساعات

أ عدد الخلايا بعد مرور ٥ ساعات (بوضع ن = ٥)

$= ٢٠٠٠٠ \times ٢^{٥} = ٦٤٠٠٠٠$ خلية

ب لإيجاد عدد الساعات التي يكون بعدها عدد الخلايا ٢ مليون و ٥٦٠ ألف خلية نضع د(س) = ٢٥٦٠٠٠٠

$\therefore ٢٠٠٠٠\,(٢)^{ن} = ٢٥٦٠٠٠٠$ بالقسمة على ٢٠٠٠٠

$\therefore ٢^{ن} = ١٢٨$

$\therefore ٢^{ن} = ٢^{٧}$ ومنها ن = ٧ ساعات.

حاول أن تحل

⑤ أجب عن اسئلة بند فكر وناقش ص (٦٦)

مكتبة مستشار الرياضيات في مصر

تمـــاريـــن ٢ – ٣

① أكمل ما يأتى:

أ إذا كان $٥^{س-٢} = ١$ فإن س = ……………………

ب إذا كان $٣^{س-٢} = ٧^{س-٢}$ فإن س = ……………………

جـ إذا كان $٢^{س+١} = ٥^{س+١}$ فإن $٣^{س+١}$ = ……………………

د إذا كان $٢^{|س|} = ٣٢$ فإن س = ……………………

هـ إذا قطع منحنى الدالة $د_١$ حيث $د_١(س) = ٣^{س}$ منحنى الدالة $د_٢$ حيث $د_٢(س) = ٤-س$ في نقطة (ك ، ٣)
فإن مجموعة حل المعادلة $٣^{س} = ٤-س$ تساوي ……………………

اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس

② إذا كان $٣^{س-٥} = ٩$ فإن س = ……………………

أ ٢ **ب** ٧ **جـ** -٣ **د** -٧

③ إذا كان $٢^{س} = ٢٠$ حيث $ن < س < ن + ١$ ، ن عدد صحيح فإن ن = ……………………

أ ١ **ب** ٢ **جـ** ٣ **د** ٤

④ إذا كان $٣^{س} = ٩$ فإن $٣^{س+١}$ = ……………………

أ ٥ **ب** ١٥ **جـ** ٢٧ **د** ٤٥

⑤ العدد $٥^{س+١} + ٥^{س}$ يقبل القسمة على …………………… لجميع قيم س الطبيعية.

أ ٧ **ب** ٦ **جـ** ١٣ **د** ١٧

⑥ إذا كان $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س-٢} = \frac{٨}{٢٨}$ فإن س = ……………………

أ ٢ **ب** ٣ **جـ** ٤ **د** ٥

⑦ منحنيا الدالتان $د(س) = ٢^{س}$ ، $ر(س) = ٣^{س}$ يتقاطعان عند س = ……………………

أ -١ **ب** ٠ **جـ** ١ **د** ٢

⑧ أوجد فى ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $٣^{س+٤} = ٩$ **ب** $٢^{س-٥} = \frac{١}{٣٢}$

جـ $٥^{س+٢} = ١$ **د** $٣^{|س|} = ٣$

هـ $٢ \times ٣^{س-٢} = ٥٤$

و $٧^{س-٥} = ٣^{س-٥}$

ز $٢^{٣س-٦} = ٥^{س-٢}$

ح $\left(\frac{٣}{٢}\right)^{س-٢} = \frac{٨}{٢٧}$

ط $٢^{س} \times ٥^{-س} = \frac{٤}{٢٥}$

ى $٤^{س} = ٦٤$

ك $٤^{١-س} = \frac{١}{٤}$

ل $(٣)^{س-٥} = \frac{١}{٩}$

٩ **أوجد بيانيًّا مجموعة حل كل من المعادلات:**

أ $٣^{س} = ٣$

ب $٢^{س+١} = ٥$ مقربًا الناتج لرقمٍ عشري واحدٍ

ج $٣^{س+١} = -س$

د $٢^{س} = \frac{١}{٢}س + ١$

١٠ إذا كانت $د(س) = ٢^{٣س}$ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات:

أ $د(س) = ٨$

ب $د(س+١) = \frac{١}{٣٢}$

١١ إذا كانت $د(س) = ٣^{س+١}$ أوجد مجموعة حل كل من المعادلاتِ:

أ $د(س) = ٢٧$

ب $د(س-١) = \frac{١}{٩}$

١٢ إذا كانت $د(س) = ٧^{س-٢}$ أوجد مجموعة حل كل من المعادلاتِ:

أ $د(س) = ٣٤٣$

ب $د(٢س) = \frac{١}{٤٩}$

١٣ اكتشف الخطأ: قام كل من محمد وكريم بحلِّ المعادلة $٢ \times ٢^{س} = ١٦$

حل محمد	حل كريم
$٢ \times ٢^{س} = ١٦$	$٢ \times ٢^{س} = ١٦$
$\therefore ٤^{س} = ١٦$	$\therefore ٢^{س} = \frac{١٦}{٢} = ٨$
$\therefore ٤^{س} = ٤^{٢}$	$\therefore ٢^{س} = ٢^{٣}$
$\therefore س = ٢$	$\therefore س = ٣$

أي الحلين هو الصواب؟ ولماذا؟

١٤ تتناقص أعداد الكائنات البحرية تبعًا لدالة التضاؤل الأسى $ص = ٨١٩٢ \left(\frac{١}{٢}\right)^{ن-١}$ حيث ن عدد الاسابيع بدءًا من الآن. أوجد:

أ عدد هذه الكائنات بعد مرور ٤ أسابيع من الآن.

ب بعد كم أسبوع من الآن يصبح عدد هذه الكائنات ٢٥٦.

٢ - ٤ الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البيانى

Logarithmic Function and its Graphical Representation

فكر و ناقش

تأمل المعادلات الأسية الآتية وحاول الإجابة عليها:

إذا كان $٢^{س} = ٢$ ، $٢^{ص} = ٣$ ، $٢^{ع} = ٤$ فإن:

١- س = ... ، ص = ...

٢- قيمة ع محصورة بين عددين صحيحين متتاليين هما .... ، ....

لاحظ أن قيمة ص لا يمكن حسابها مباشرة مثل س ، ع لذلكَ نحتاج إلى مفهوم دالة جديدة لحساب قيمة ص.

تعلم

الدالة اللوغاريتمية *Logarithmic Function*

إذا كان س، أ عددين موجبين حيث أ ≠ ١ فإنَّ الدالة اللوغاريتمية ص = $لو_{أ}$ س هي الدالة العكسية للدالة الأسية $ص = أ^{س}$

مثال: **إذا كان** $لو_{٢}\ ٣٢ = ٥$ **فإن** $٢^{٥} = ٣٢$ والعكس صحيح.

تعبير شفهي:

إذا كانت النقطة (جـ، ى) ∈ للدالة الأسية $ص = أ^{س}$ فإن:

١- النقطة(.........، ....) ∈ للدالة ص = $لو_{أ}$ س.

٢- الصورة الأسية $أ^{جـ} = ى$ حيث أ ∈ $ع^{+}$ - {١} تكافئ الصورة اللوغاريتمية ....

مثال

التحويل إلى الصورة اللوغاريتمية

① حوِّل كلًّا مما يأتي إلى الصورة اللوغاريتمية:

أ $٣^{٤} = ٨١$ ب $٢٥^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٥}$ ج $١٠^{-٢} = ٠,٠١$

الحل

أ $لو_{٣}\ ٨١ = ٤$ ب $لو_{٢٥}\ \frac{١}{٥} = -\frac{١}{٢}$ ج $لو_{١٠}\ ٠,٠١ = -٢$

تعبير شفهى: هل يمكن تحويل $(-٢)^{٤} = ١٦$ إلى الصورة اللوغاريتمية؟ **فسر ذلك.**

سوف تتعلم

- تعريف الدالة اللوغاريتمية.
- التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية.
- التحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية والعكس.
- حل بعض المعادلات اللوغاريتمية البسيطة.

المصطلحات الأساسية

لوغاريتم	*Logarithm*
دالة عكسية	*Inverse Function*
مجال	*Domain*
اللوغاريتم المعتاد	*Common Logarithm*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة.
- حاسب آلي.

إرشادات للدراسة

تسمى $لو_{أ}$ س = ص بالصورة اللوغاريتمية

وتسمى $أ^{ص}$ = س بالصورة الأسية المكافئة لها.

لاحظ أن (أ) أساس موجب

فإذا كانت $(-٣)^{٤} = ٨١$ فإنه لا توجد صورة لوغاريتمية مكافئة لها.

مكتبة مستشار الرياضيات في مصر

حاول أن تحل

① عَبِّر عن كلٍّ مما يأتي بصورة لوغاريتمية:

أ $١٠^{٣} = ١٠٠٠$ ب $٨^{\frac{١}{٣}} = ٢$ ج $ب^{س} = ص$ حيث $ب \in ع^{+} - \{١\}$

اللوغاريتمات المعتاد *Common Logarithm*

هو اللوغاريتم الذي أساسه ١٠ ويكتب بدون كتابة الأساس، أي $لو_{١٠}\ ٧ = لو\ ٧$ ، $لو_{١٠}\ ١٢٧ = لو\ ١٢٧$ ويمكن استخدام مفتاح log الموجود بالحاسبة لإيجاد اللوغاريتم المعتاد لأي عدد.

مثال

② حوِّل كلًّا مما يأتي إلى الصورة الأسية:

أ $لو_{٢}\ ٣٢ = ٥$ ب $لو\ ١٠٠٠ = ٣$ ج $لو_{٢}\ ١ = صفر$

الحل

أ $٢^{٥} = ٣٢$ ب $١٠^{٣} = ١٠٠٠$ ج $٢^{صفر} = ١$

حاول أن تحل

② حوِّل كلًّا مما يأتي إلى الصورة الأسية:

أ $لو_{١٢٥}\ ٢٥ = \frac{٢}{٣}$ ب $لو\ ١٠٠ = ٢$ ج $لو_{٥}\ ٥ = ١$

مثال

إيجاد قيم عبارات لوغاريتمية

③ أوجد قيمة كُلٍّ من:

أ $لو_{٥}\ ١٢٥$ ب $لو\ ٠,٠١$

الحل

أ نفرض $لو_{٥}\ ١٢٥ = س$ وبالتحويل إلى الصورة الأسية

$\therefore ٥^{س} = ١٢٥$ $\therefore ٥^{س} = ٥^{٣}$ ومنها $س = ٣$

$\therefore لو_{٥}\ ١٢٥ = ٣$

ب نفرض $لو\ ٠,٠١ = ص$ (لوغاريتم معتاد أساسه ١٠) وبالتحويل للصورة الأسية

$\therefore ١٠^{ص} = ٠,٠١$ $\therefore ١٠^{ص} = ١٠^{-٢}$

منها $ص = -٢$ $\therefore لو\ ٠,٠١ = -٢$

حاول أن تحل

③ أوجد قيمة كل من:

أ لو$_{٣}$ ٨١   ب لو$_{\frac{١}{٢}}$ ٣٢

مثال حل المعادلات

④ أوجد في ع مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية:

أ لو$_{٢}$ (س+٥) = ٣   ب لو$_{٥}$ ٦٢٥ = س - ١   جـ لو$_{س}$ (س+٦) = ٢

الحل

أ المعادلة معرفة لكل قيم س + ٥ > صفر   أي س > -٥ (مجال تعريف المعادلة)

وبتحويل المعادلة إلى الصورة الأسية

∴ س + ٥ = ٢^{٣} ∴ س + ٥ = ٨

ومنها س = ٣

∴ ٣ ∈ مجال تعريف المعادلة   ∴ مجموعة الحل = {٣}

ب المعادلة معرفة لجميع قيم س الحقيقية وبتحويل المعادلة إلى الصورة الأسية.

∴ ٥$^{س-١}$ = ٦٢٥   ∴ ٥$^{س-١}$ = ٥^{٤}

∴ س - ١ = ٤   ومنها س = ٥

∴ مجموعة الحل = {٥}

جـ المعادلة معرفة لجميع قيم س التي تُحقِّق كلًّا من
$$\begin{cases} \text{س} + ٦ > \text{صفر} \\ \text{س} > \text{صفر} \\ \text{س} \neq ١ \end{cases}$$

أي أن مجال تعريف المعادلة هو]صفر ، ∞[- {١}

وبتحويل المعادلة إلى الصورة الأسية:

س^{٢} = س + ٦   س^{٢} - س - ٦ = ٠

(س - ٣) (س + ٢) = ٠

إما س = ٣   أو   س = -٢

وحيث إن س = -٢ ∉ مجال تعريف المعادلة

∴ مجموعة الحل = {٣}

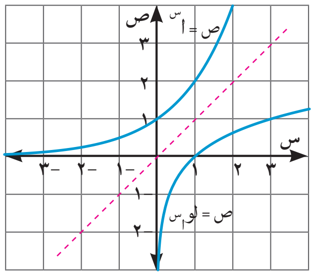
حاول أن تحل

④ أوجد في ع مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية:

أ لو$_{٥}$ (٣س-١) = ١   ب لو$_{٣}$ ٢٧ = س + ٢   جـ لو$_{(س-١)}$ ٩ = ٢

التمثيل البيانى للدالة اللوغاريتيمة *Graphical Representation of the Logarithmic Function*

إذا كانت د(س) = أ$^{\text{س}}$ حيث أ ∋ ع$^{+}$ -{١} فإن الدالة العكسية للدالة د تسمى بالدالة اللوغاريتمية أى ص =لو$_{\text{أ}}$ س



العلاقة بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية

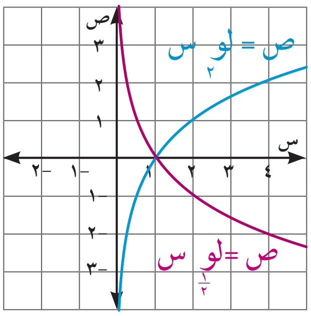
الشكل المقابل يمثل الدالة الأسية ص = أ$^{\text{س}}$ والدالة اللوغاريتمية ص = لو$_{\text{أ}}$ س ادرس خواص كل من الدالتين من حيث المجال والمدى والاطراد والتماثل حول المستقيم ص = س .

مثال

⑤ ارسم فى شكل واحد منحنى كلٍّ من الدالتين ص = لو$_{٢}$ س، ص =لو$_{\frac{١}{٢}}$ س

الحل

نختار قيم س قوى العدد ٢ (الأساس) {٢$^{-٢}$ ، ٢$^{-١}$، ٢^{٠}، ٢^{١}، ٢^{٢}}



س	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤
لو$_{٢}$ س	-٢	-١	صفر	١	٢
لو$_{\frac{١}{٢}}$ س	٢	١	صفر	-١	-٢

من الرسم يمكنك استنتاج الخواص الآتية لمنحنى الدالة اللوغاريتمية

المجال = ع+ ، المدى = ع

الدالة ص = لو$_{\text{أ}}$ س متزايدة لكل أ > ١ ومتناقصة لكل ٠ < أ < ١

حاول أن تحل

⑤ مثل بيانيًّا منحنى الدالة ص = لو$_{٣}$ س ومن الرسم أوجد المدى وابحث اطرادها.

مثال

⑥ تطبيقات حياتية: تطبق إحدى الدول نظامًا ضريبيًّا بحيث يدفع الممول الضريبة المستحقة سنويًّا وفقًا للدالة

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \text{١٠٪ س} & \text{عندما س} \leqslant \text{٥٠٠٠} \\ \text{١٠٪س + ١٠٠ لو (س - ٤٩٩٩)} & \text{عندما س} > \text{٥٠٠٠} \end{cases}$$

حيث س هى صافى الربح السنوى . **أوجد:**

أ الضريبة المستحَقَّة على أحد الممولين الذين يبلغ صافى ربحهم السنوى ٣٦٠٠ جنيه.

ب الضريبة المستحَقَّة على أحد الممولين الذين يبلغ صافى ربحهم السنوى ٨٠٠٠ جنيه.

الحل

أ د(٣٦٠٠) = ١٠٪ × ٣٦٠٠ = ٠,١ × ٣٦٠٠ = ٣٦٠ جنيه

ب د(٨٠٠٠) = ١٠٪ × ٨٠٠٠+١٠٠ لو (٨٠٠٠ - ٤٩٩٩) = ١١٤٧,٧ جنيه

حاول أن تحل

⑥ إذا كانت أ تعبر عن المبلغ المصروف على الدعاية لأحد الشركات فى السنة كان ص يُعبِّر عن المبلغ الذى تتحصَّل عليه الشركة بعد مبيعات هذه السنة حيث ص = ١٠^{٤} [١ + ٢ لو ($\frac{أ}{١٠٠}$ + ١)] احسب ص عندما أ = ١١٠٠ جنيه.

تمارين ٢ – ٤

① أكمل ما يأتى:

أ الصورة الأسية المكافئة للصورة لو$_{٣}$ ٢٧ = ٣ هى ....

ب الصورة اللوغاريتمية المكافئة للصورة ٣^{صفر} = ١هى ....

جـ لو٠,٠٠١ = ...

د لو$_{٢}$ ١ = ...

هـ إذا كان لو$_{س}$ ٤ = ٢ فإن س = ...

و إذا كان لو$_{٢}$ ١٢٨ = س + ١ فإن س = ...

ز مجال الدالة د : د(س) = لو$_{٢}$ س هو ....

ح الدالة د حيث د(س) = لو$_{أ}$ س متناقصة لكل أ ∋ ....

ط منحنى الدالة د حيث د(س) = لو$_{٢}$ س يمر بالنقطة (٨، ....)

ى إذا كان لو٣ = س ، لو٥ =ص فإن لو ١٥ = ... (بدلالة س،ص)

② أوجد فى ع مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية:-

أ لو$_{٣}$ (س - ١) = ٢

ب لو$_{٥}$ (س + ٢) = ٣

جـ لو$_{س}$ ٩ = $\frac{٢}{٣}$

د لو$_{س+١}$ ٨ = $\frac{٣}{٤}$

هـ لو$_{س}$ (س + ٢) = ٢

و لو$_{س}$ ٩ = ٢

③ بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة

أ لو$_{٥}$ ١

ب لو$_{٧}$ ٧

جـ لو$_{٣}$ ٩

د لو$_{٦}$ ٣ + لو$_{٦}$ ٢

④ مثل بيانيًّا الدالة د فى كل مما يأتى الآتية ومن الرسم أوجد مداها وابحث اطرادها:

أ د(س) = لو$_{٢}$ س

ب د(س) = لو$_{٣}$ س

جـ د(س) = لو$_{\frac{١}{٢}}$ س

د د(س) = لو$_{\frac{١}{٣}}$ (س+١)

⑤ استخدم الحاسبة فى إيجاد قيمة كلٍّ من:-

أ لو ١٥

ب لو$_{٢}$ ٢٧

جـ ٤لو ٧ - ٥لو١٣

⑥ إذا كانت مصاريف الاشتراك السنوى بالجنيه لأسرة فى أحد النوادى الاجتماعية تتبع العلاقة د(س) = ٥٠٠ + ١٠٠لو (ن س) حيث ن عدد سنوات الاشتراك س عدد الأفراد. أوجد قيمة اشتراك أسرة مكونة من ٥ أفراد للسنة الرابعة فى هذا النادى.

٢ - ٥ بعض خواص اللوغاريتمات

Some Properties of Logarithms

سوف تتعلم

- استخدام بعض خواص اللوغاريتمات.
- حل المعادلات اللوغاريتمية.
- استخدام الحاسبة في حل المعادلات الأسية.
- تطبيقات حياتية على اللوغاريتمات.

المصطلحات الأساسية

- معادلة لوغاريتمية.

Logarithmic Equation

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- حاسب آلى مزود ببرامج رسومية

تَعلَّمت فى الدرس السابق مفهوم اللوغاريتم وكيفية تمثيل الدالة اللوغاريتمية بيانيًّا وفيما يلى ندرج بعض خواص اللوغاريتمات التى تُساعد فى تبسيط المقادير اللوغاريتمية أو حل المعادلات التى تَحتوى على لوغاريتم.

تعلم

بعض خواص اللوغاريتمات *Some Properties of Logarithms*

إذا كان $أ \in ع^{+} - \{١\}$ ، س ، ص $\in ع^{+}$ فإن

١- $\text{لو}_{أ}\, أ = ١$

فمثلاً $\text{لو}_{٣}\, ٣ = ١$ ، $\text{لو}\, ١٠ = ١$

٢- $\text{لو}_{أ}\, ١ = \text{صفر}$

فمثلا $\text{لو}_{٥}\, ١ = \text{صفر}$ ، $\text{لو}\, ١ = \text{صفر}$

حاول إثبات كل من **١** ، **٢** من تعريف اللوغاريتم

٣- خاصية الضرب في اللوغاريتمات:

$\text{لو}_{أ}\, س\, ص = \text{لو}_{أ}\, س + \text{لو}_{أ}\, ص$ حيث س، ص $\in ع^{+}$

لإثبات صحة هذه الخاصية:

ضع $ب = \text{لو}_{أ}\, س$ ، $جـ = \text{لو}_{أ}\, ص$

ومن تعريف اللوغاريتمات فإن:

$س = أ^{ب}$ ، $ص = أ^{جـ}$

فتكون $س\, ص = أ^{ب} \times أ^{جـ}$ **أي أن** $س\, ص = أ^{ب + جـ}$

وبتحويل هذه الصورة إلى الصورة اللوغاريتمية تكون: $\text{لو}_{أ}\, س\, ص = ب + جـ$

وبالتعويض عن قيمتي ب، جـ تكون $\text{لو}_{أ}\, س\, ص = \text{لو}_{أ}\, س + \text{لو}_{أ}\, ص$

مثال

① بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة $\text{لو}_{٣٤}\, ٢ + \text{لو}_{٣٤}\, ١٧$

الحل

المقدار = لو$_{٣٤}$ (٢ × ١٧) استخدام خاصية (٣)

= لو$_{٣٤}$ ٣٤

= ١ استخدام خاصية (١)

حاول أن تحل

① إذا كان لو$_{٢}$ ٧ ≃ ٢,٨ ، لو$_{٢}$ ١٣ ≃ ٣,٧ أوجد بدون استخدام الحاسبة قيمة لو$_{٢}$ ٩١

٤- خاصية القسمة في اللوغاريتمات:

لو$_{أ}$ $\frac{س}{ص}$ = لو$_{أ}$ س - لو$_{أ}$ ص (حاول بنفسك إثبات صحة العلاقة)

مثال

② بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة لو ٥٠ - لو ٥

الحل

المقدار = لو $\frac{٥٠}{٥}$ استخدام خاصية القسمة

= لو ١٠ = ١ استخدام خاصية (١)

حاول أن تحل

② بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة لو$_{٢}$ ٧ - لو$_{٢}$ ٣,٥

٥- خاصية لوغاريتم القوة:

لو$_{أ}$ س^{ن} = ن لو$_{أ}$ س حيث س > ٠ (حاول إثبات صحة العلاقة بنفسك)

مثال

③ بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة لو$_{٥}$ ١٢٥

الحل

المقدار = لو$_{٥}$ ٥^{٣}

= ٣ لو$_{٥}$ ٥ استخدام خاصية القوة

= ٣ × ١ = ٣ استخدام خاصية (١)

لاحظ أن: لو$_{أ}$ $(\frac{١}{س})$ = - لو$_{أ}$ س حيث س ∈ ع$^{+}$

حاول أن تحل

③ أوجد فى أبسط صورة لو$_{\sqrt{٣}}$ ٢٧

④ **تفكير ناقد:** هل مجال الدالة د(س) = لو$_{أ}$ س^{٢} هو نفسه مجال الدالة ر(س) = ٢لو$_{أ}$ س فسر إجابتك

٦ - خاصية تغيير الأساس

$\text{لو}_{\text{ص}}\,\text{س} = \frac{\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}}{\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص}}$ وإثبات صحة هذه الخاصية

بوضع: $\text{ع} = \text{لو}_{\text{ص}}\,\text{س}$

$\text{ص}^{\text{ع}} = \text{س}$ بالتحويل إلى الصورة الأسية

$\text{ع}\,\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص} = \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}$ بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس أ

فتكون $\text{ع} = \frac{\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}}{\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص}}$ أي أن: $\text{لو}_{\text{ص}}\,\text{س} = \frac{\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}}{\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص}}$

مثال

④ اختصر لأبسط صورة $\text{لو}_{٧}\,١٦ \times \text{لو}_{٢}\,٤٩$

الحل

المقدار $= \frac{\text{لو}\,١٦}{\text{لو}\,٧} \times \frac{\text{لو}\,٤٩}{\text{لو}\,٢}$ استخدام خاصية (٦)

$= \frac{\text{لو}\,٢^{٤}}{\text{لو}\,٧} \times \frac{\text{لو}\,٧^{٢}}{\text{لو}\,٢}$

$= \frac{٤\,\cancel{\text{لو}\,٢}}{\cancel{\text{لو}\,٧}} \times \frac{٢\,\cancel{\text{لو}\,٧}}{\cancel{\text{لو}\,٢}}$ استخدام خاصية (٥)

$= ٤ \times ٢ = ٨$

حاول أن تحل

⑤ أوجد حل المثال السابق بتغيير الأساس لعدد آخر غير ١٠

٧ - خاصية المعكوس الضربى

$\text{لو}_{\text{ب}}\,\text{أ} = \frac{١}{\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ب}}$ أيْ أنَّ كلًّا من $\text{لو}_{\text{ب}}\,\text{أ}$ ، $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ب}$ ، معكوس ضربى للآخر (حاول إثبات صحة العلاقة)

مثال

⑤ أوجد بدون استخدام الحاسبة قيمة $\frac{١}{\text{لو}_{٣}\,١٥} + \frac{١}{\text{لو}_{٥}\,١٥}$

الحل

المقدار $= \text{لو}_{١٥}\,٣ + \text{لو}_{١٥}\,٥$ استخدام خاصية (٧)

$= \text{لو}_{١٥}\,(٣ \times ٥)$ استخدام خاصية (٣)

= لو$_{١٥}$ ١٥ = ١ **استخدام خاصية (١)**

حاول أن تحل

⑥ بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة $\frac{١}{لو_{٢}\ ٣٠} + \frac{١}{لو_{٣}\ ٣٠} + \frac{١}{لو_{٥}\ ٣٠}$

تبسيط المقادير اللوغاريتمية *Simplifying the Logaritmic Experssions*

مثال

⑥ اختصر لأبسط صورة لو ٠٫٠٠٩ - لو $\frac{٢٧}{١٦}$ + ٣ لو $\frac{٥}{٢}$ - لو $\frac{١}{١٢}$

الحل

المقدار = لو $\frac{٩}{١٠٠٠}$ - لو $\frac{٢٧}{١٦}$ + لو $(\frac{٥}{٢})^{-٣}$ - لو $\frac{١}{١٢}$ **خاصية (٥)**

= لو $(\frac{٩}{١٠٠٠} \times \frac{١٦}{٢٧} \times \frac{١٢٥}{٨} \times \frac{١٢}{١})$ **خاصية (٣)، (٤)**

= لو ١ = صفر **خاصية (٢)**

حاول أن تحل

⑦ اختصر لأبسط صورة ٤ لو $\sqrt{٣}$ - لو $١\frac{٢}{٥}$ - لو $\frac{٩}{٧}$ - لو $\frac{١}{٢}$

حل المعادلات اللوغاريتمية *Solving Logarithmic Equations*

مثال

⑦ أوجد فى ع مجموعة حل كل من المعادلات

أ لو$_{٢}$ س + لو$_{٢}$ (س + ١) = ١   ب لو$_{٢}$ س + لو$_{٤}$ س = ٣

الحل

أ الدالة معرفة لكل س > صفر ، س + ١ > صفر

أى أن س > صفر **(مجال تعريف المعادلة)**

∴ لو$_{٢}$ س (س + ١) = ١ **استخدام خاصية (٣)**

∴ س (س + ١) = $٢^{١}$ **تحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية**

∴ $س^{٢}$ + س - ٢ = صفر ∴ (س + ٢) (س - ١) = صفر

إما س = -٢ أو س = ١ وحيث إن س = -٢ ∉ مجال تعريف المعادلة

∴ مجموعة الحل = {١}

ب الدالة معرفة لكل س > صفر **(مجال تعريف المعادلة)**

∴ لو$_{٢}$ س + $\frac{لو_{٢}\ س}{لو_{٢}\ ٤}$ = ٣ **خاصية (٦)**

لو$_٢$ س + $\frac{\text{لو}_٢\text{ س}}{٢}$ = ٣   بالضرب فى ٢

∴ ٢لو$_٢$ س + لو$_٢$ س = ٦   ∴ ٣ لو$_٢$ س = ٦   ∴ لو$_٢$ س = ٢

∴ س = ٤ (التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الأسية)

وحيث إن س = ٤ ∋ مجال تعريف المعادلة   ∴ مجموعة الحل = {٤}

؟ حاول أن تحل

⑧ أوجد فى ع مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية :

أ لو (٢س + ١) - لو (٣ س - ١) = ١   ب لو$_٢$ س = لو$_س$ ٢

حل المعادلات الأسية باستخدام اللوغاريتمات *Solving the Power Equations by Using Logarithms*

مثال

⑨ أوجد فى ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين:

أ ٢^{س} = ٧   ب ٣$^{س+١}$ = ٥$^{س-٢}$

الحل

أ ٢^{س} = ٧   بأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ لو ٢^{س} = لو ٧   ∴ س لو٢ = لو ٧   ∴ س = $\frac{\text{لو}٧}{\text{لو}٢}$

وباستخدام الحاسبة بالتتابع الآتى:

⊟ log 7) ▽ log 2) =   2.807354922

∴ س ≃ ٢,٨١   ∴ مجموعة الحل = {٢,٨١}

(التحقق من صحة الإجابة باستخدام الحاسبة)   2 x$^■$ ans =   7

ب ٣$^{س+١}$ = ٥$^{س-٢}$ بأخذ لو للطرفين

∴ (س+١)لو ٣ = (س -٢) لو ٥   ∴ س لو٣ + لو٣ = س لو ٥ - ٢ لو٥

∴ س لو٣ - س لو٥ = - لو٣ - ٢ لو ٥   ∴ س (لو٣ - لو ٥) = - لو٣ - ٢ لو٥

∴ س = $\frac{-\text{لو}٣ - ٢\ \text{لو}٥}{\text{لو}٣ - \text{لو}٥}$

وباستخدام الحاسبة بالتتابع الآتى: ⊟ – log 3) – 2 log 5) ▽

log 3) – log 5) =   2.807354922

∴ س ≃ ٨,٤٥   ∴ مجموعة الحل = {٨,٤٥}

(التحقق من صحة الإجابة باستخدام الحاسبة)

أ 3 x■ ans + 1 ▷ ÷ 5 x■ ans – 2 =

حاول أن تحل

⑧ أوجد لأقرب رقمين عشريين مجموعة حل كلٍّ من المعادلات :

أ $٧^{س} = ٢$ ب $٤^{س-١} = ٣^{س}$

نشاط تطبيقات رياضية وحياتية

⑩ **الربط بالصناعة:** إذا كانت كفاءة عمل أحد الآلات تتناقص سنويًّا طبقًا للعلاقة ك = ك. $(٠,٩)^{ن}$ حيث ك كفاءة الآلة، ك. الكفاءة الابتدائية للآلة ، ن عدد سنوات عمل الآلة. فإذا عُلِمَ أنَّ الآلة تتوقف عن العمل إذا بلغت كفاءتها ٤٠٪ فما عدد السنوات التى تعملها هذه الآلة قبل أنْ تتوقف عن العمل.

الحل

المقصود ببلوغ الكفاءة ٤٠٪ أى ٤٠٪ من الكفاءة الابتدائية

∴ ٠,٤ ك. = $(٠,٩)^{ن}$ ك. بالقسمة على ك.

∴ ٠,٤ = $(٠,٩)^{ن}$ بأخذ لو للطرفين

∴ لو ٠,٤ = ن لو ٠,٩ ∴ ن = $\frac{\text{لو } ٠,٤}{\text{لو } ٠,٩}$ = ٨,٦٩٦٧١٨

أىْ أنَّ الآلة لا تعمل أكثر من ٨ سنوات ونصف السنة.

تطبيق على النشاط

⑨ فى المثال السابق أوجد كفاءة الآلة بعد مرور ٤ سنوات من تشغيلها

تمارين ٢ – ٥

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

① $\text{لو}_{٢}\ ٨$ =

أ ٤ ب ٣ ج ١٦ د ١٠

② لو٢ + لو٥ =

أ ١ ب لو ٧ ج لو٢,٥ د ١٠

③ $\text{لو}_{٥} \sqrt{٥}$ =

أ ٢ ب ٥ ج $\frac{١}{٢}$ د -١

④ إذا كان لو٣ = س ، لو ٤ = ص فإنَّ لو ١٢ =

أ س + ص ب س ص ج س - ص د لوس + لو ص

مكتبة مستشار الرياضيات في مصر

⑤ ٢ $\text{لو}_{٦}$ ٢ + ٢ $\text{لو}_{٦}$ ٣ =

أ ٦ ب ٣٦ ج ٢ د ١٢

⑥ $\text{لو}_{٢}$ ٥ × $\text{لو}_{٥}$ ٢ =

أ ١ ب ١٠ ج $\frac{٥}{٢}$ د صفر

⑦ $\text{لو}_{٥}$ ٢ × $\text{لو}_{٣}$ ٥ × $\text{لو}_{٢}$ ٣ =

أ ٣٠ ب ١ ج صفر د لو ٣٠

⑧ عَبِّر عن كلٍّ ممايأتى بدلالة لوس ، لو (س + ١)

أ لو س (س+١) ب لو $\frac{\text{س}}{\text{س}+١}$ ج لو $\sqrt{\text{س}}$ (س+١)^{٢}

⑨ اختصْر لأبسطِ صورة:

أ $\text{لو}_{٦}$ ٥٤ - $\text{لو}_{٦}$ ٩ ب $\text{لو}_{٦}$ ٢ + $\text{لو}_{٦}$ ٣ ج $\text{لو}_{٢}$ ١٢ + $\text{لو}_{٢}$ $\frac{٢}{٣}$

د لو ٤٨ + لو١٢٥ - لو ٦ ه $\frac{١ - \text{لو}٢}{\text{لو}١٢٥}$ و $\frac{\text{لو}٤٩ + ٣\,\text{لو}٧}{\text{لو}٧}$

ز $\text{لو}_{٢}$ ١٦ + $\text{لو}_{٣}$ $\sqrt{٣}$ + لو ٠,١ ح $\frac{١}{٢}$ $\text{لو}_{٣}$ أ + $\frac{١}{٢}$ $\text{لو}_{٣}$ ب + ٢ $\text{لو}_{٣}$ جـ - $\text{لو}_{٣}$ $\sqrt{\text{أب}}$ - $\text{لو}_{٣}$ ٣جـ^{٢}

⑩ أوجد فى ع مجموعة حلَّ كلٍّ من المعادلات الآتية:

أ $\text{لو}_{٢}$ س + $\text{لو}_{٢}$ (س +٢) = ٣ ب لو س + لو (س -٣) =١ ج $\text{لو}_{٥}$ س - $\text{لو}_{٥}$ ٢ = ٢

د لو (س +٣) - لو ٣ = لو س ه $\frac{١}{\text{لو}_{٢}\,\text{س}}$ + $\frac{١}{\text{لو}_{٣}\,\text{س}}$ = ٢ و لو س - $\frac{٣}{\text{لوس}}$ = ٢

⑪ أثبت أنَّ $\text{لو}_{\text{ب}}$ أ × $\text{لو}_{\text{جـ}}$ ب × $\text{لو}_{\text{ء}}$ جـ × $\text{لو}_{\text{أ}}$ ء = ١ ثم احسب قيمة $\text{لو}_{٢}$ ٣ × $\text{لو}_{٣}$ ٥ × $\text{لو}_{٥}$ ١٦

⑫ أوجد قيمة س فى كلٍّ مما يأتى مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد.

أ ٣$^{\text{س}}$ = ٧ ب ٥$^{\text{س}-١}$ = ٢ ج ٤ × ٧$^{\text{س}-٢}$ = ١ د ٢$^{\text{س}-٣}$ = ٣$^{\text{س}+١}$

نشاط

الربط بالاحياء: إذا كان حجم عينة من البكتيريا فى لحظة معينة هو ٣ × ١٠^{٦} وكان حجم العينة يزداد تبعًا لدالة أسية ح = ٣ × ١٠^{٦} (١,١٥)$^{\text{ن}}$ فأوجد حجم البكتيريا بعد ٤ ساعات.

مُلخَّصُ الوَحْدَة

١) الأسس الصحيحة

أ) $أ^{ن} = أ \times أ \times أ \times \quad \times أ$ (العامل أ مكرر ن من المرات)

ب) $أ^{٠} = ١$ حيث $أ \in ح - \{٠\}$

ج) $أ^{-١} = \frac{١}{أ}$ ، $أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$ حيث $أ \neq ٠$

خواص الأسس الصحيحة

لكل م ، ن ∈ ص ، أ ، ب ∈ ع ، ب ≠ ٠ فإن:

أ) $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$

ب) $(أب)^{ن} = أ^{ن} ب^{ن}$

ج) $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن}$

د) $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} = \frac{أ^{ن}}{ب^{ن}}$

هـ) $(أ^{م})^{ن} = أ^{م ن}$

٢) الجذور النونية

المعادلة $س^{ن} = أ$ حيث $أ \in ع$، $ن \in ص^{+}$ لها ن من الجذور

أ) ن عدد زوجى ، $أ \in ع^{+}$

يوجد جذران حقيقيان (باقى الجذور أعداد مركبة)، أحدهما موجب والآخر سالب ويرمز لهما $\pm \sqrt[ن]{أ}$

ب) ن عدد زوجى ، $أ \in ع^{-}$ ليس للمعادلة جذور حقيقية (جميع الجذور أعداد مركبة)

ج) ن فردى ، $أ \in ع$

يوجد للمعادلة جذر حقيقى وحيد (باقى الجذور أعداد مركبة)، ويرمز له $\sqrt[ن]{أ}$

د) $ن \in ص^{+}$، أ = صفر

يوجد للمعادلة حل وحيد هو الصفر (لها ن من الجذور المكررة وكل منها يساوى صفر).

٣) خواص الجذور النونية:

إذا كان $\sqrt[ن]{أ}$ ، $\sqrt[ن]{ب} \in ع$ فإن:

أ) $\sqrt[ن]{أب} = \sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب}$

ب) $\sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}}$ ، ب ≠ ٠

ج) $\sqrt[ن]{أ^{م}} = (\sqrt[ن]{أ})^{م} = أ^{\frac{م}{ن}}$

د) $\sqrt[ن]{أ^{ن}} = أ$ إذا كان ن فردى $= |أ|$ إذا كان ن زوجي

٤) الأسس الكسرية $أ^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$

٥) خواص الأسس الكسرية

أ) $أ^{\frac{م}{ن}} = \sqrt[ن]{أ^{م}} = (\sqrt[ن]{أ})^{م}$ حيث $أ = ع - \{٠\}$ ، $ن \in ص^{+} - \{١\}$، $م \in ص$ وليس بين م ، ن عامل مشترك.

ب) يمكن تعميم قوانين القوى الصحيحة على القوى الكسرية.

٦ **الدالة الأسية:** إذا كانت $د: ع \longrightarrow ع^{+}$ حيث $د(س) = أ^{س}$ لكل $أ \in ع^{+} - \{١\}$ فإن د تسمى دالة أسية أساسها أ

٧ خواص منحنى الدالة الأسية

أ مجال الدالة = ع ب المدى $ع^{+}$

جـ الدالة متزايدة على مجالها لكل أ > ١ وتسمى بدالة النمو الأسى.

د الدالة متناقصة على مجالها لكل ٠ < أ < ١ وتسمى بدالة التضاؤل الأسى.

٨ النمو الأسى: يمكن استخدام الدالة د حيث د(س) = أ$(١ + ر)^{ن}$ لتمثيل النمو الأسى بنسبة مئوية ثابتة فى فترات زمنية متساوية حيث ن هى الفترة الزمنية، أ القيمة الابتدائية، ر النسبة المئوية للنمو فى الفترة الزمنية الواحدة.

٩ التضاؤل الأسى: يمكن استخدام الدالة د حيث د(س) = أ $(١ - ر)^{ن}$ لتمثيل التضاؤل الأسى بنسبة مئوية ثابتة فى الفترات زمنية متساوية حيث ن هى الفترة الزمنية، أ القيمة الابتدائية، ى النسبة المئوية للتضاؤل فى الفترة الزمنية الواحدة.

١٠ الدالة اللوغاريتمية

أ إذا كانت أ ∋ $ح^{+}$ - {١} فإن الدالة ص = لو$_{أ}$ س هى الدالة العكسية للدالة الأسية ص = $أ^{س}$

ب $أ^{ب}$ = جـ فإن ب = لو$_{أ}$ جـ (التحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية والعكس).

جـ اللوغاريتم المعتاد: هو لوغاريتم اساسه ١٠ {لاحظ أن لو ٥ = لو$_{١٠}$ ٥ }

١١ خواص الدالة اللوغاريتمية

أ مجال الدالة = $ع^{+}$ ب المدى = ع

جـ الدالة ص= لو$_{أ}$ س متزايدة لكل أ > ١ ومتناقصة لكل ٠ < أ < ١

١٢ خواص اللوغاريتمات: إذا كانت أ ∋ $ع^{+}$ - {١}

أ لو$_{أ}$ أ = ١ ب لو$_{أ}$ ١ = صفر جـ لو$_{أ}$ $س^{م}$ = م لو$_{أ}$ س **حيث** س > صفر

د لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص = لو$_{أ}$ س ص حيث س، ص > صفر

هـ لو$_{أ}$ س - لو$_{أ}$ ص = لو$_{أ}$ $\frac{س}{ص}$ حيث س، ص > صفر

و لو$_{أ}$ س = $\frac{لو_{ب}\ س}{لو_{ب}\ أ}$ حيث س > صفر ، أ، ب ∋ $ع^{+}$ - {١}

ز لو$_{أ}$ س × لو$_{س}$ أ = ١

تمـــارين عامة

١ أكمل ما يأتى:

أ إذا كان $س^{٤} = ١٦$ فإن س = ……………………

ب $٤^{\frac{١}{٢}} =$ ……………………

ج إذا مر منحنى الدالة $ص = أ^{س}$ بالنقطة (-٤، ١٦) فإن أ = ……………………

د لو ١٠٠٠ = ……………………

هـ الدالة د حيث $د(س) = أ^{س}$ تكون متناقصة لجميع قيم س عندما أ ∈ ……………………

و منحنى الدالة د : $د(س) = ٢^{س}$ هو صورة منحنى الدالة …………………… بالانعكاس فى المستقيم ص = س

ز منحنى الدالة $ص = ٣^{س}$ هو صورة منحنى الدالة …………………… بالانعكاس فى محور الصادات.

ح إذ كان $٥^{س-٢} = ٣^{س-٢}$ فإن $٧^{س-٢} =$ ……………………

ط منحنى الدالة د حيث $د(س) = ٢^{س+١}$ يقطع محور الصادات في النقطة ……………………

ى إذا كان $لو_{٢}\,س = ٣$ فإن $لو_{٨}\,س =$ ……………………

ك $لو_{٢}\,٣ \times لو_{٥}\,٢ \times لو_{٣}\,٥ =$ ……………………

ل $\frac{١}{لو_{٢}\,١٤} + \frac{١}{لو_{٧}\,١٤}$

٢ أوجد أبسط صورة:

أ $٢٧^{\frac{١}{٣}}$

ب $(\sqrt[٣]{١٠^{٢}})^{-\frac{٣}{٢}}$

ج $لو_{٢}\,\frac{٣}{٢} + لو_{٢}\,\frac{٨}{٣}$

د $\frac{\sqrt{٨} \times \sqrt[٣]{٤}}{\sqrt[٦]{٢}}$

هـ $لو_{٣}\,٥ \times لو_{٥}\,٣$

و $لو_{٢}\,٤٠ - لو_{٢}\,٥$

٣ أوجد فى ع مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية:

أ $س^{\frac{٢}{٣}} = ٩$

ب $٣^{س-٢} = \frac{١}{٨١}$

ج $لو_{س}\,(س + ٦) = ٢$

د $لو_{٥}\,\frac{١}{س} = -٢$

هـ $لو_{٢}\,(س - ١) - لو_{٢}\,(س - ٢) = ٢$

و $٣^{س+١} = ٤$

④ استخدم الحاسبة فى إيجاد قيمة $\frac{٧^{٢٨٥} \times ٤^{٢٠٠}}{٨^{٤٠٠}}$ مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد.

⑤ مثل بيانيًّا كلًّا من الدوال الآتية:

أ $د(س) = ٢^{س - ١}$ **ب** $ر(س) = (\frac{١}{٣})^{س}$ **جـ** $هـ(س) = لو_{٢}\,س$ **د** $و(س) = لو_{\frac{١}{٢}}(س - ١)$

الربط بالاقتصاد:

⑥ يزداد سعر إحدى السلع المعمرة سنويًّا بمقدار ٩٪ فإذا كان السعر الأصلى للسلعة هو ١٠٠٠ جنيه.

أ أوجد صيغة توضِّح بها سعر السلعة بعد مرور ن سنة.

ب بعد كم سنة يصبح سعر السلعة ضعف سعرها الآن.

⑦ تتناقص أعداد أحد أنواع الحيوانات فى إحدى الدول طبقًا لتضاؤل أسى فإذا كانت أعداد هذا الحيوان فى عام ١٩٦٠ تساوى ٨٠٥٤٠ ثم تضاءل هذا العدد عام ٢٠٠٠ ليصبح ٥٣٨٧٩.

أ اكتب صيغة توضح بها أعداد هذا الحيوان بعد مرور ن سنة من عام ١٩٦٠.

ب أوجد أعداد هذا الحيوان عام ١٩٨٥.

جـ إذا استمر تضاؤل أعداد هذا الحيوان بهذا المعدل ففى أى عام تتوقع أن تصل أعداد هذا الحيوان إلى نصف ما هو عليه عام ١٩٦٠.

⑧ إذا كان لو٢ = ٠,٣٠١ ، لو٣ = ٠,٤٧٧ أوجد بدون استخدام الحاسبة قيمة.

أ لو٦ **ب** $لو\,\frac{٣}{٢}$ **جـ** لو٥

⑨ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $٢^{س} = ٥$ **ب** $٣^{س+١} = ٧$ **جـ** $(\frac{٢}{٣})^{س-٢} = ٩$

د $٥^{١-س} = ٣$ **هـ** $٣^{س-٢} = ٨^{س-١}$ **و** $٢ \times ٥^{س} = ٧$

⑩ إذا كانت $د(س) = ٣^{س}$

أ أثبت أنَّ د(أ) × د(ب) = د(أ + ب) **ب** أوجد مجموعة حل المعادلة $د(س + ١) = \frac{١}{٩}$

⑪ أوجد بيانيًّا مجموعة حل المعادلة $٢^{س} = ١ - \frac{١}{٢}\,س$

اختبار تراكمى

① عَيِّن مجال كلٍّ من الدوال الآتية:

أ $د(س) = \sqrt{س - ٢}$　　**ب** $د(س) = \frac{س - ٢}{س}$　　**ج** $ر(س) = لو_{٢}(س - ٢)$

② ارسم منحنى كلٍّ مما يأتى، ومن الرسم عَيِّن المدى وابحث اطراد الدالة ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية.

أ $د(س) = (س - ٢)^{٢}$　　**ب** $د(س) = ٣^{س-١}$

ج $ر(س) = ٢ - |س|$　　**د** $هـ(س) = ١ - لو_{٢} س$

③ اختصر:

أ $\frac{\sqrt{أ} \times \sqrt[١٢]{أ^{-٢}}}{\sqrt[٣]{أ}}$　　**ب** $(١٢٥)^{\frac{٢}{٣}} \times (٨١)^{\frac{١}{٤}} \times (١٥)^{-١}$

④ أوجد قيمة كلٍّ مما يأتى (بدون استخدام الحاسبة):

أ $(١٦)^{\frac{١}{٤}}$　　**ب** $\sqrt[٣]{٢٧^{-٢}}$　　**ج** $(٣^{-١})^{٢} \times ٩ \times (\sqrt[٣]{١٥})^{صفر}$

د $لو ٥ + لو \frac{١}{٥}$　　**هـ** $لو_{٩} \frac{١}{٢٧}$　　**و** $٣لو_{٣} ٥ + لو_{٣} \frac{٢٤٣}{١٢٥}$

⑤ أوجد فى ع مجموعة حل كلٍّ من المعادلات:

أ $|س - ٢| = ٥$　　**ب** $٣^{س-٢} = \frac{١}{٣}$

ج $س^{-٤} = \frac{١}{١٦}$　　**د** $لوس = لو٣ + لو١٠$

⑥ أوجد باستخدام الحاسبة:

أ قيمة س التى تُحقق $٣^{س-٢} = ٢٥$ مقربًا الناتج لرقمين عشريين

ب قيمة $\frac{٣^{٧٥٠}}{٥^{٥١٠}}$

⑦ أيُّ الدوال الآتيةُ تمثل دالة نمو وأيها تُمثل دالة تضاؤل:

أ $ص = ٣(١,٠٥)^{س}$　　**ب** $ص = ١٠(١,٢)^{س+١}$

ج $ص = ٠,٤(\frac{١}{٢})^{س}$　　**د** $ص = ٠,٢(٣)^{١-س}$

الوحدة الثالثة

النهايات

Limits

مقدمة الوحدة

التفاضل والتكامل (Calculus) أحد الفروع الحديثة لمادة الرياضيات، والتى تختص بدراسة النهايات والاتصال والاشتقاق والتكامل والمتسلسلات اللانهائية وهو علم يستخدم لدراسة التغير فى الدوال وتحليلها.

ويدخل علم التفاضل والتكامل فى العديد من التطبيقات الهندسية والحياتية والتجارية والعلوم المختلفة، فكثيرًا ما نحتاجه لدراسة سلوك الدالة، والتغير فيها وحل بعض المشكلات التى يعجز علم الجبر وبعض العلوم الأخرى عن حلها.

مخرجات تعلم الوحدة

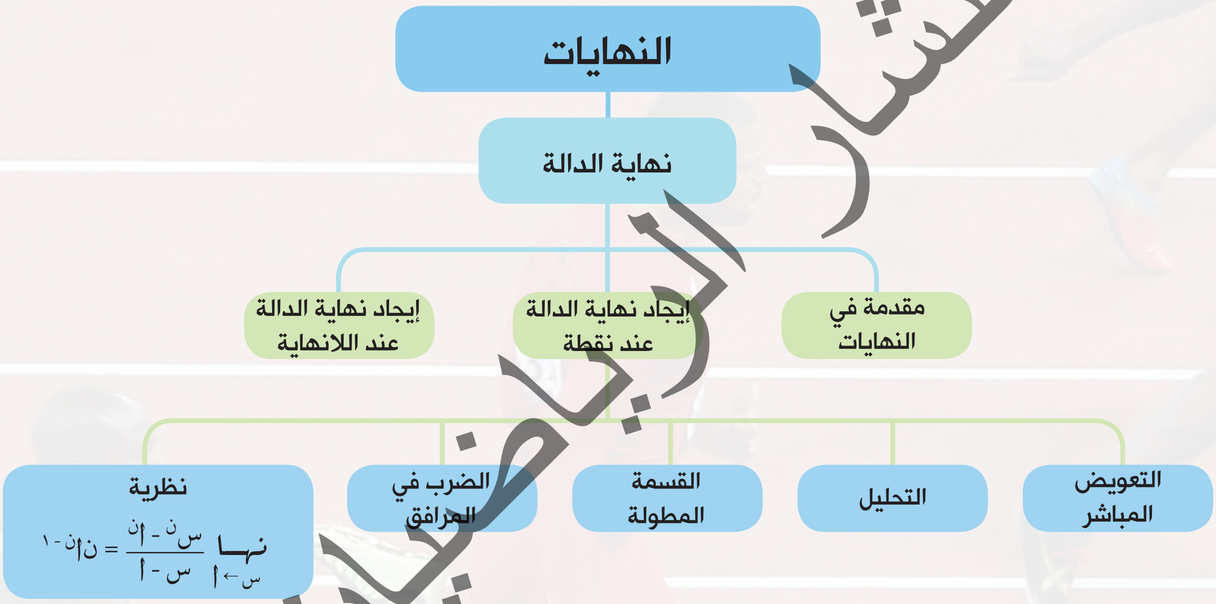
فى نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف مقدمة في النهايات.
- يتعرف بعض الكميات غير المعنية مثل:
  $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - \infty$ ، $\text{٠} \times \infty$
- يحدد طريقة إيجاد نهاية دالة: بالتعويض المباشر، بالتحليل، بالقسمة المطولة، بالضرب في المرافق.
- يوجد نهاية دالة مستخدمًا القانون $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{أ}} = \text{ن} \, \text{أ}^{\text{ن}-١}$
- يستنتج نهاية دالة مستخدمًا القانون:
  $$\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{م}} - \text{أ}^{\text{م}}} = \frac{\text{ن}}{\text{م}} \, \text{أ}^{\text{ن}-\text{م}}$$
- يوجد نهاية دالة عند اللانهاية جبريًّا وبيانيًّا
- يستخدم الحاسبات البيانية للتحقق من صحة نهاية دالة وتقرير قيمة النهاية.
- يتعرف تطبيقات متنوعة على المفاهيم الأساسية لنهايات الدوال.

المصطلحات الأساسية

كمية غير معينة	*Unspecified Quantity*	تعويض مباشر	*direct Substitution*	نهاية الدالة عند اللانهاية	*Limit of a Function at Infinity*
غير معرف	*Undefined*	مرافق	*Conjugate*		
نهاية دالة	*Limit of a Function*	دالة كثيرة الحدود	*Polynomial Function*		

مخطط تنظيمي للوحدة


النهايات
نهاية الدالة
مقدمة في النهايات
إيجاد نهاية الدالة عند نقطة
إيجاد نهاية الدالة عند اللانهاية
التعويض المباشر
التحليل
القسمة المطولة
الضرب في المرافق
نظرية
$\underset{س \to أ}{\text{نهـا}} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} = ن أ^{ن - ١}$

دروس الوحدة

الدرس (٣-١): مقدمة فى النهايات.

الدرس (٣-٢): إيجاد نهاية الدالة جبريًّا.

الدرس (٣-٣): نهاية الدالة عند اللانهاية.

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة - حاسب آلى - برامج رسومية

الوحدة الثالثة

٣-١

مقدمة في النهايات

Introduction to Limits of Functions

سوف تتعلم

- الكميات غير المعينة.
- نهاية دالة عند نقطة.

المصطلحات الأساسية

كمية غير معينة	*Unspecified Quantities*
غير معرف	*Undefined*
قيمة دالة	*Value of a Function*
نهاية دالة	*Limit of a Function*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

يعتبر مفهوم نهاية دالة عند نقطة من المفاهيم الأساسية فى علم التفاضل، ويعتمد هذا المفهوم بصفة أساسية على سلوك الدالة عند جميع نقاط تعريفها. ولدراسة هذا السلوك ينبغى التعرف على أنواع الكميات فى مجموعة الأعداد الحقيقية.

فكر و ناقش

أوجد ناتج العمليات الآتية إن أمكنك ذلك:

① ٣ × ٥ ② ٢٨ ÷ ٤

③ ٤ - ٩ ④ ٧ ÷ ٠

⑤ ٠ ÷ ٠ ⑥ ∞ + ٣

⑦ ∞ ÷ ∞ ⑧ ∞ - ∞

تذكر أن

∞ هى رمز يدل على كمية غير محدودة أكبر من أى عدد حقيقى يمكن تصوره أو تخيله.

الكمياتُ غير المعينة: *Unspecified Quantities*

تعلم

فى بند فكِّر وناقش نجد أنَّ بعض نواتج العمليات محددًا تمامًا مثل رقم ١ ، ٢ ، ٣ ، بينما بعض النواتج لايمكن تحديدها مثل باقى العمليات.

لاحظ أنَّ: ٧ ÷ ٠ غير معرفة حيث إن القسمة على صفر لا معنى لها.

والآن لا يمكن تحديد ناتج العملية ٠ ÷ ٠ حيث يوجد عدد لا نهائى من الأعداد إذا ضُرب كلٌّ منها فى صفر كان الناتج صفر لذلك فإن $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة، ومن الكميات غير المعينة أيضًا: $\frac{\infty}{\infty}$ ، ∞ - ∞ ، ٠ × ∞ **(لماذا؟)**

أضف إلى معلوماتك

تجرى العمليات الحسابية على مجموعة الأعداد الحقيقية والرمزين ∞ ، - ∞ كالآتى:

لكل أ ∈ ع فإن:

١ $\infty + أ = \infty$

٢ $-\infty + أ = -\infty$

٣ $\infty \times أ = \begin{cases} -\infty \text{ ، إذا كان } أ < ٠ \\ \infty \text{ ، إذا كان } أ > ٠ \end{cases}$

٤ $-\infty \times أ = \begin{cases} -\infty \text{ ، إذا كان } أ > ٠ \\ \infty \text{ ، إذا كان } أ < ٠ \end{cases}$

مثال

① أوجد ناتج العمليات الآتية إذا كان ذلك ممكنًا:

أ ٤ + ∞ ب ٣ - ∞ ج ٠ ÷ ٣ د - ٥ ÷ ٠
هـ ∞ + ∞ و ٠ ÷ ٠ ز ٥ × ∞ ح - ٦ × - ∞

الحل

أ ∞ ب - ∞ ج ٠ د غير معرفة
هـ ∞ و كمية غير معينة ز ∞ ح ∞

حاول أن تحل

① أوجد ناتج العمليات الآتية إذا كان ذلك ممكنًا:

أ ٠ ÷ (- ٢) ب ٧ ÷ ٠ ج ٩ ÷ ∞ د ∞ × ٠
هـ (- ٧) × ∞ و (- ∞) + ١٢ ز ∞ + ∞ ح ∞ ÷ ∞

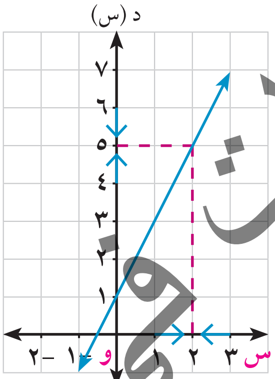
نهاية دالة عند نقطة:

نشاط

في الشكل التالى: الخط البيانى للدالة د المعرفة على ع وفق القاعدة د (س) = ٢ س + ١ أكمل الجداول الآتية، ثم أجب عن الأسئلة الآتية:

س	د(س)
٢,١	٥,٢
٢,٠١	٥,٠٢
٢,٠٠١	٥,٠٠٢
٢,٠٠٠١	٥,٠٠٠٢
....	....
↓	↓
٢	٥
س > ٢	
س تقترب من ٢ جهة اليمين	

س	د(س)
١,٩	٤,٨
١,٩٩	٤,٩٨
١,٩٩٩	٤,٩٩٨
١,٩٩٩٩	٤,٩٩٩٨
....	....
↓	↓
٢	٥
س < ٢	
س تقترب من ٢ من جهة اليسار	



لاحظ أن:

- عندما تقترب س إلى العدد ٢ من جهة اليمين، ما القيمة التي تقترب إليها د (س).
- عندما تقترب س إلى العدد ٢ من جهة اليسار، ما القيمة التي تقترب إليها د (س).

عندما تَقترب س من العدد (٢) من اليمين و من اليسار فإنَّ د(س) تَقترب من العَددِ (٥) ونُعبرِّ عن ذلك رياضيًّا كالآتي: $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} (٢ س + ١) = ٥$

تعريف ١

إذا كانت قيمة الدالة د تقترب من قيمة وحيدة ل ، عندما تقترب س من أ من جهتى اليمين واليسار، فإن نهاية د(س) تساوى ل **وتكتب رمزيًا:** $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ د(س) = ل

وتقرأ: نهاية د(س) عندما تقترب س من أ تساوى ل

مثال

② إذا كانت د(س) = $\frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$ فادرس قيم د(س) عندما تقترب س من ٢.

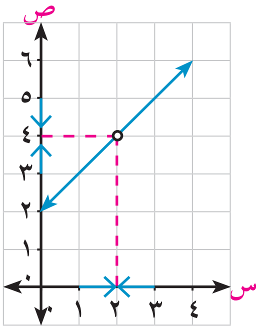
الحل

س	د(س)
٢,١	٤,١
٢,٠١	٤,٠١
٢,٠٠١	٤,٠٠١
....	....
↓	↓
٢	٤

س > ٢

س	د(س)
١,٩	٣,٩
١,٩٩	٣,٩٩
١,٩٩٩	٣,٩٩٩
....	....
↓	↓
٢	٤

س < ٢



من الشكل البيانى ومن بيانات الجدول الموضحة نجد أنَّ د(س) ⟵ ٤ عندما س ⟵ ٢ من جهة اليمين و من جهة اليسار ∴ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢} = ٤$

لاحظ من هذا المثال أنَّ:

١- الفجوة في الشكل البياني تَعني حالة من حالات عَدم التعيين $\frac{صفر}{صفر}$ عندما س = ٢ (أى أن الدالة غير معرفة عند س = ٢)

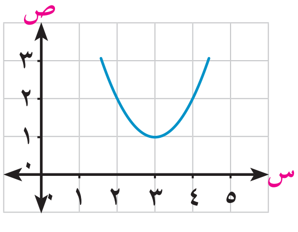
٢- وجود نهاية للدالة عندما س ⟵ ٢ لاتعنى بالضرورة أنْ تكون الدالة معرفة عند س = ٢

حاول أن تحل

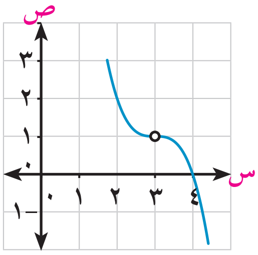
② إذا كانت د(س) = $\frac{س^{٢} - ١}{س + ١}$ فادرس قيم د(س) عندما تقترب س من (- ١)

مثال

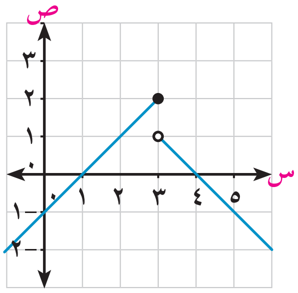
③ في كل من الأشكال الآتية أوجد $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ د(س)



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

مكتبة مستشار الرياضيات في مصر

الحل

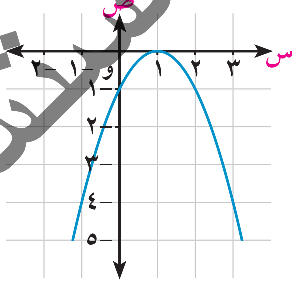
شكل (١) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٣}}{\text{نهـــا}}$ د(س) = ١

شكل (٢) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٣}}{\text{نهـــا}}$ د(س) = ١ (لاحظ أن الدالة غير معرفة عند س = ٣)

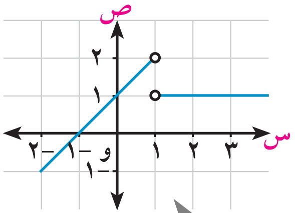
شكل (٣) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٣}}{\text{نهـــا}}$ د(س) ليس لها وجود

حاول أن تحل

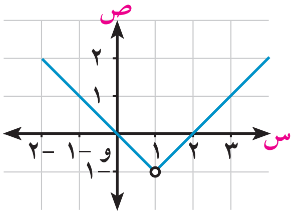
③ في كل من الأشكال الآتية . أوجد $\underset{\text{س} \leftarrow \text{١}}{\text{نهـــا}}$ د(س)



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

من الأمثلة السابقة نَستنتج أنَّ:

وجود نهاية للدالة عندما س ⟵ أ لايعنى بالضرورة أن تكون الدالة معرفة عند س = أ،

والعكس إذا كانت الدالة معرفة عند س = أ فهذا لا يعنى وجود نهاية للدالةعند س = أ

تعبير شفهى: عبر بأسلوبك عن الفرق بين قيمة دالة عند نقطة ونهاية الدالة عند نفس النقطة.

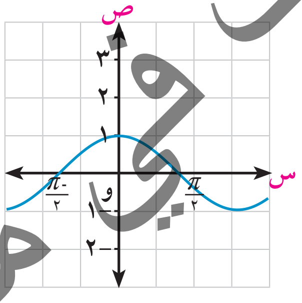
تمـاريـن (٣-١)

أولا: تمارين على إيجاد النهاية بيانيًا:

① من الرسم البيانى أوجد:

أ $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهـــا}}$ د(س)

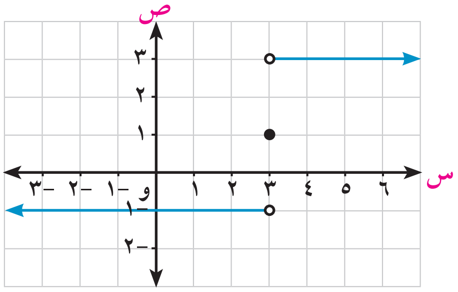
ب د(٠)



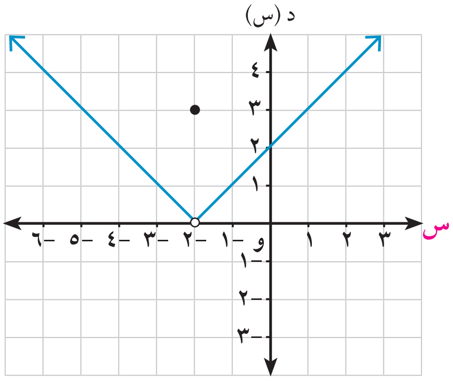
② من الرسم البيانى المقابل أوجد إنْ كان ذلك ممكنًا:

أ $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٣}}{\text{نهـــا}}$ د(س)

ب د(٣)



مكتبة مستشار الرياضيات في مصر



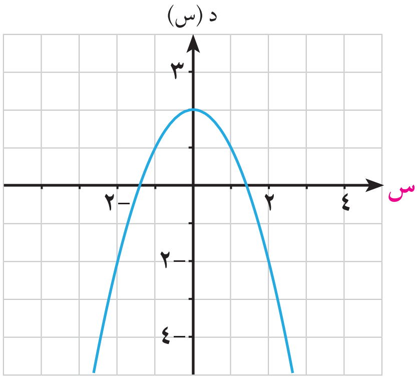
③ من الرسم البيانى المقابل أوجد:

أ $\underset{س \to -٢}{\text{نهـــا}}$ د(س)

ب د(- ٢)

ج $\underset{س \to ٠}{\text{نهـــا}}$ د(س)

د د(٠)



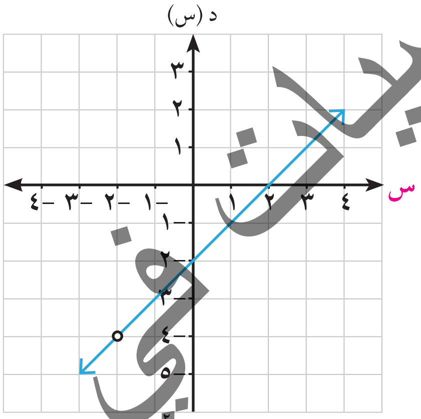
د(س) = ٢ − $س^٢$

④ الشكل البياني المقابل للدالة د(س) = ٢ - $س^٢$

من الشكل البيانى المقابل أوجد:

أ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـــا}}$ (٢ - $س^٢$)

ب د(٠)



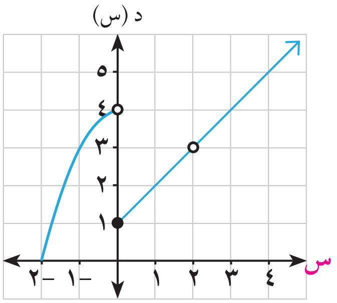
د(س) = $\frac{س^٢ - ٤}{س + ٢}$

⑤ الشكل البياني المقابل للدالة د(س) = $\frac{س^٢ - ٤}{س + ٢}$

من الشكل البيانى المقابل أوجد:

أ $\underset{س \to -٢}{\text{نهـــا}}$ د(س)

ب د(- ٢)



⑥ من الشكل البيانى المقابل أوجد:

أ د (٠)

ب $\underset{س \to ٠}{\text{نهـــا}}$ د(س)

ج د (٢)

د $\underset{س \to ٢}{\text{نهـــا}}$ د(س)

ثانيًا: إيجاد نهاية الدالة جبريًا:

⑦ أكمل الجدول الآتي واستنتج $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ د(س) حيث د(س) = ٥ س + ٤

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	⟵	٢	⟶	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د(س)				⟵	؟	⟶			

⑧ أكمل الجدول الآتي واستنتج $\underset{\text{س}\leftarrow -١}{\text{نهــا}}$ (٣ س + ١)

س	-٠,٩	-٠,٩٩	-٠,٩٩٩	⟵	-١	⟶	-١,٠٠١	-١,٠١	-١,١
د(س)				⟵	؟	⟶			

⑨ أكمل الجدول الآتي واستنتج $\underset{\text{س}\leftarrow -١}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^٢ - ١}{\text{س} + ١}$

س	-٠,٩	-٠,٩٩	-٠,٩٩٩	⟵	-١	⟶	-١,٠٠١	-١,٠١	-١,١
د(س)				⟵	؟	⟶			

⑩ أكمل الجدول الآتي واستنتج $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \frac{\text{س} - ٢}{\text{س}^٢ - ٤}$

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	⟵	٢	⟶	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د(س)				⟵	؟	⟶			

٣-٢ إيجاد نهاية الدالة جبريًّا

Finding the Limit of a Function Algebraically

مكتبة مستشار الرياضيات في مصر

فى هذا الدرس نتعرف على بعض الطرق والنظريات التى تمكننا من حساب نهاية دالة عند نقطة دون الحاجة إلى عمل جدول و إيجاد النهاية عدديًّا أو رسم منحنى الدالة و إيجاد النهاية بيانيًّا.

نشاط

إذا كانت $د_١(س) = س^٢ + ١$ ، $د_٢(س) = ٢\,س + ٣$ أوجد

١- $د_١(١)$ ، $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}\, د_١(س)$ (ماذا تلاحظ)

٢- $د_٢(٠)$ ، $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}\, د_٢(س)$ (ماذا تلاحظ)

تعلم

نهاية الدالة كثيرة الحدود *Limit of a Polynomial Function*

نظرية ١

إذا كانت د(س) كثيرة حدود، أ ∈ ع

فإن: $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}\, د(س) = د(أ)$

مثال

① أوجد نهاية كلٍّ من الدوال الآتية:

أ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\, (س^٢ - ٣س + ٥)$ ب $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}\, (-٤)$

الحل

أ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\, (س^٢ - ٣س + ٥)$

$= ٤ - ٦ + ٥ = ٣$ (بالتعويض المباشر)

ب $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}\, (-٤) = -٤$ **لاحظ أنَّ** د(س) = -٤ ثابتة لكل قيم س ∈ ع

حاول أن تحل

① أوجد كلًّا من النهايات الآتية:

أ $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}\, (٢س - ٥)$ ب $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}}\, (٣س^٢ + س - ٤)$

سوف تتعلم

- نهاية الدالة كثيرة الحدود.
- بعض نظريات النهايات.
- استخدام القسمة المطولة فى إيجاد قيمة نهاية دالة.
- استخدام النظرية $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}\, \frac{س^ن - أ^ن}{س - أ} = ن\,أ^{ن - ١}$

المصطلحات الأساسية

- نهاية دالة *Limit of a Function*
- دالة كثيرة الحدود *Polynomial Function*
- تعويض مباشر *Direct Substitution*
- قسمة تركيبية *Synthetic Division*
- المرافق *Conjugate*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

نظرية ٢

إذا كان $\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \text{د(س)} = \text{ل}$ ، $\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \text{ه(س)} = \text{م}$

فإن:

١- $\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \text{ك د(س)} = \text{ك.ل}$ حيث $\text{ك} \in \text{ع}$

٢- $\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} [\text{د(س)} \pm \text{ه(س)}] = \text{ل} \pm \text{م}$

٣- $\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \text{د(س)} \,.\, \text{ه(س)} = \text{ل.م}$

٤- $\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \dfrac{\text{د(س)}}{\text{ه(س)}} = \dfrac{\text{ل}}{\text{م}}$ بشرط $\text{م} \neq ٠$

٥- $\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} (\text{د(س)})^{\text{ن}} = \text{ل}^{\text{ن}}$ حيث $\text{ل}^{\text{ن}} \in \text{ع}$

مثال

٢ أوجد كلًّا من النهايات الآتية:

أ $\lim\limits_{\text{س}\to -١} \dfrac{٣\text{س} + ٧}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٥}$

ب $\lim\limits_{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}} \dfrac{\text{ظا س}}{\text{س}}$

الحل

أ $\lim\limits_{\text{س}\to -١} \dfrac{٣\text{س} + ٧}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٥} = \dfrac{\lim\limits_{\text{س}\to -١} (٣\text{س} + ٧)}{\lim\limits_{\text{س}\to -١} (\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٥)} = \dfrac{٣ \times -١ + ٧}{(-١)^{٢} + ٢(-١) - ٥} = \dfrac{٤}{-٦} = \dfrac{-٢}{٣}$

ب $\lim\limits_{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}} \dfrac{\text{ظا س}}{\text{س}} = \dfrac{\lim\limits_{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}} \text{ظا س}}{\lim\limits_{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}} \text{س}} = \dfrac{١}{\frac{\pi}{٤}} = \dfrac{٤}{\pi}$

حاول أن تحل

٢ احسب النهايات الآتية:

أ $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٣}{٢\text{س} + ١}$

ب $\lim\limits_{\text{س}\to \pi} \text{س جتا س}$

نظرية ٣

➤ **إذا كانت** $\text{د(س)} = \text{ه(س)}$ لكل $\text{س} \in \text{ع} - \{\text{أ}\}$

وكانت $\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \text{ه(س)} = \text{ل}$ **فإن** $\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \text{د(س)} = \text{ل}$

مثال

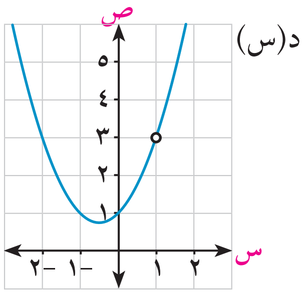
٣ أوجد: $\lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{\text{س}^{٣} - ١}{\text{س} - ١}$

الحل

نُلاحظ أنَّ $\text{د(س)} = \dfrac{\text{س}^{٣} - ١}{\text{س} - ١}$ غير مُعينة عند س = ١

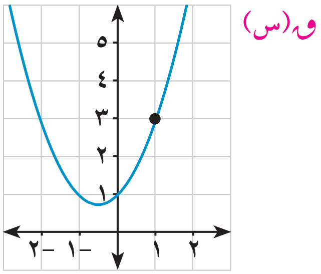
بالتحليل والقسمة على العوامل المتشابهة غير الصفريَّة

فإنه يمكن كتابة د(س) على الصورة:



$$\text{د}(\text{س}) = \frac{(\cancel{\text{س} - ١})(\text{س}^٢ + \text{س} + ١)}{(\cancel{\text{س} - ١})} = \text{س}^٢ + \text{س} + ١$$

$$= \text{ه}(\text{س})$$



من ذلك نَجد أنَّ د(س) = ه(س) لكل س ≠ ١

وحيث أن $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـــا}}\ \text{ه}(\text{س}) = ٣$ (كثيرة الحدود)

فإنه طبقًا **للنظرية السابقة نستنتج أن** $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـــا}}\ \text{د}(\text{س}) = ٣$

$$\therefore \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـــا}}\ \frac{\text{س}^٣ - ١}{\text{س} - ١} = ٣$$

حاول أن تحل

③ أوجد: $\underset{\text{س} \leftarrow -٢}{\text{نهـــا}}\ \frac{\text{س}^٣ + ٨}{\text{س} + ٢}$

مثال

④ أوجد:

$$\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـــا}}\ \frac{\text{س}^٣ - ٢\text{س}^٢ + ١}{\text{س}^٢ + \text{س} - ٢}$$

الحل

نلاحظ أن دالة البسط د(س) = ٠ وذلك بالتعويض عن س = ١، كذلك دالة المقام ه(س) = ٠ بالتعويض أيضًا عن س = ١ وهذا يَعني أنَّ العامل (س - ١) مشترك في كلٍّ من البسط والمقام. ونظرًا لصعوبة تَحليل دالة البسط إلى عوامل أحدها (س - ١) نستخدم القسمة المطولة لنوجد العامل الآخر للمقدار س^٣ - ٢س^٢ + ١ كالآتي:

$$\begin{array}{r|l} \text{س}^٣ - ٢\text{س}^٢ \qquad + ١ & \text{س} - ١ \\ \hline \text{س}^٣ - \text{س}^٢ \qquad\quad & \text{س}^٢ - \text{س} - ١ \\ \hline ٠ - \text{س}^٢ \qquad + ١ & \\ - \text{س}^٢ + \text{س} \qquad & \\ \hline ٠ - \text{س} + ١ & \\ - \text{س} + ١ & \\ \hline \text{صفر} & \end{array}$$

لذلك فإن:

$$\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـــا}}\ \frac{(\text{س} - ١)(\text{س}^٢ - \text{س} - ١)}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ٢)} = \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـــا}}\ \frac{\text{س}^٢ - \text{س} - ١}{\text{س} + ٢} = -\frac{١}{٣}$$

ارشاد للحل

فى عملية القسمة المطولة

(١) ترتيب حدود كل من المقسوم والمقسوم عليه ترتيبًا تصاعديًّا أو تنازليًّا بنفس الطريقة.

(٢) نقسم الحد الأول من المقسوم على الحد الأول من المقسوم عليه ونكتب ناتج القسمة.

(٣) نضرب ناتج القسمة فى المقسوم عليه ويطرح الناتج من المقسوم للحصول على الباقى.

(٤) نستمر بنفس الطريقة حتى الانتهاء من عملية القسمة.

حاول أن تحل

④ أ $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}\ \frac{\text{س}^٣ - \text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦}{\text{س} - ٢}$

ب $\underset{\text{س} \leftarrow -٣}{\text{نهـــا}}\ \frac{\text{س}^٣ - ١٠\text{س} - ٣}{\text{س}^٢ + ٢\text{س} - ٣}$

مثال

استخدام المرافق

٥ أوجد النهايات الآتية:

أ $\lim\limits_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س - ٣} - ١}{س - ٤}$

ب $\lim\limits_{س \to ٥} \frac{س^{٢} - ٥س}{\sqrt{س + ٤} - ٣}$

الحل

لاحظ أنَّ: $د(س) = \frac{\sqrt{س - ٣} - ١}{س - ٤}$ غير معينة عند $س = ٤$

لذلك نبحث عن طرق نتخلَّص بها من العامل (س - ٤) فى كلٍّ من البسط و المقام.

$$\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س - ٣} - ١}{س - ٤} \times \frac{\sqrt{س - ٣} + ١}{\sqrt{س - ٣} + ١} = \lim_{س \to ٤} \frac{س - ٣ - ١}{(س - ٤)(\sqrt{س - ٣} + ١)}$$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{س - ٤}{(س - ٤)(\sqrt{س - ٣} + ١)}$$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{١}{\sqrt{س - ٣} + ١} = \frac{١}{٢}$$

ب $\lim\limits_{س \to ٥} \frac{س^{٢} - ٥س}{\sqrt{س + ٤} - ٣} = \lim\limits_{س \to ٥} \frac{س^{٢} - ٥س}{\sqrt{س + ٤} - ٣} \times \frac{\sqrt{س + ٤} + ٣}{\sqrt{س + ٤} + ٣}$

$$= \lim_{س \to ٥} \frac{س(س - ٥)(\sqrt{س + ٤} + ٣)}{س + ٤ - ٩} = \lim_{س \to ٥} \frac{س(س - ٥)(\sqrt{س + ٤} + ٣)}{(س - ٥)}$$

$$= \lim_{س \to ٥} س(\sqrt{س + ٤} + ٣) = ٥\,(٣ + ٣) = ٣٠$$

حاول أن تحل

٥ أوجد النهايات الآتية:

أ $\lim\limits_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س - ١} - ٢}{س - ٥}$

ب $\lim\limits_{س \to -١} \frac{س + ١}{\sqrt{س + ٥} - ٢}$

نظرية

$$\lim_{س \to ا} \frac{س^{ن} - ا^{ن}}{س - ا} = ن\,ا^{ن - ١}$$

مثال

٦ $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^{١٩} - ١}{س - ١} = \lim\limits_{س \to ١} \frac{س^{١٩} - ١^{١٩}}{س - ١} = ١٩ \times ١^{١٨} = ١٩$

نتائج

نتائج على النظرية:

١- $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{(س + ا)^{ن} - ا^{ن}}{س} = ن\,ا^{ن - ١}$

٢- $\lim\limits_{س \to ا} \frac{س^{ن} - ا^{ن}}{س^{م} - ا^{م}} = \frac{ن}{م}\,ا^{ن - م}$

مثال

⑦ أوجد:

أ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٥)^{٤} - ٦٢٥}{س}$

ب $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} - ٣٢}{س^{٢} - ٤}$

جـ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(س + ١)^{١١} - ١}{س}$

د $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٤)^{٥} + ٣٢}{س - ٢}$

الحل

أ $= \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٥)^{٤} - ٥^{٤}}{س} = ٤ \times ٥^{٣} = ٥٠٠$

ب $= \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} - ٢^{٥}}{س^{٢} - ٢^{٢}} = \frac{٥}{٢} \times ٢^{٣} = ٢٠$

جـ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(س + ١)^{١١} - ١^{١١}}{س} = ١١ \times ١^{١١-١} = ١١$

د $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٤)^{٥} + ٣٢}{س - ٢} = \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٤)^{٥} - (-٢)^{٥}}{(س - ٤) - (-٢)}$

$= ٥ \, (-٢)^{٤} = ٨٠$

حاول أن تحل

⑥ أوجد:

أ $\underset{س \to -٥}{\text{نهـا}} \frac{س^{٤} - ٦٢٥}{س + ٥}$

ب $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(هـ + ٣)^{٤} - ٨١}{هـ}$

جـ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{س + ١} - ١}{س}$

تمـــاريـن (٣–٢)

أكمل ما يأتى:

① $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} (٣س + ١) =$ ....

② $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س - ١}{س + ١} =$ ....

③ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - س}{س} =$ ....

④ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢} =$ ....

⑤ $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} - أ^{٥}}{س - أ} =$ ....

⑥ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣} - ٨}{س - ٢} =$ ....

⑦ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} + س - ٢}{س - ١} =$ ....

⑧ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٤} - ١٦}{س - ٢} =$ ....

⑨ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} - ٣٢}{س^{٣} - ٨} =$ ....

⑩ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \left(\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}\right)^{٥} =$ ....

١١ $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢}{٢\text{س} - ٤} = \text{..........}$

١٢ $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٧} + ١}{\text{س}^{٥} + ١} = \text{..........}$

اختر الإجابة الصحيحةَ من بين الإجابات المعطاة:

١٣ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س}}$ تُساوى:

أ ٠ ب ١

جـ ٢ د ليس للدالة نهاية

١٤ $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢} + \text{س}}{\text{س} + ١}$ تُساوى:

أ -١ ب صفر

جـ ١ د ٣

١٥ $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س}^{٢} - ٨}{\text{س} - ٢}$ تُساوى:

أ ٢ ب ٤

جـ ٦ د ٨

١٦ $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ تساوى

أ ١ ب $\frac{\pi}{٢}$

جـ $\frac{٢}{\pi}$ د ليس للدالة نهاية

١٧ $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا س}}{\text{س}}$ تساوى

أ $\frac{\pi}{٢}$ ب ١

جـ $\frac{٤}{\pi}$ د ليس للدالة نهاية

أوجد قيمةَ كلٍّ من النهايات الآتية (إنْ وجِدَت)

١٨ $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} (\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٢)$

١٩ $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢} + ١}{\text{س} - ٣}$

٢٠ $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} (٢\text{س} - \text{جا س})$

٢١ $\underset{\text{س} \to \pi}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا } ٢\text{س}}{\text{س}}$

٢٢ $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} + ١}{\text{س}^{٣} + ١}$

٢٣ $\underset{\text{س} \to ٩}{\text{نهـا}} \frac{٩ - \text{س}}{\text{س}^{٢} - ٨١}$

٢٤ $\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} + ٤}{\text{س} - ٤}$

٢٥ $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س}^{٢} + \text{س}}$

٢٦ $\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{٤\text{س}^{٢} - ٦٤}{\text{س} - ٤}$

٢٧ $\underset{\text{س} \to ٥}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٢٥\text{س}}{\text{س} - ٥}$

٢٨ $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢}{\text{س} + ١}$

٢٩ $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{٥\text{س}^{٢} + ٥}{٣\text{س}^{٢} - ٣}$

٣٠ $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٣} + ٨}{\text{س}^{٢} - ٤}$

٣١ $\underset{\text{س} \to \frac{٣}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{س}^{٢} - \text{س} - ٣}{٤\text{س}^{٢} - ٩}$

٣٢ $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦}{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢}$

٣٣ $\underset{\text{س} \to -٣}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{س}^{٢} + ٥\text{س} - ٣}{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٦}$

٣٤ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(٢\text{س} - ١)^{٢} - ١}{٥\text{س}}$

٣٥ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} + ١)^{٣} - ١}{\text{س}}$

٣٦ $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{\text{س}^{٢}}{\text{س} + ١} - \dfrac{٣\text{س} + ٤}{\text{س} + ١} \right)$

٣٧ $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٢}{\text{س} - ١}$

٣٨ $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - ٢}{\text{س} - ١}$

٣٩ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٣} - ٥\text{س}^{٢} - \text{س}}{\text{س}^{٤} + ٢\text{س}}$

٤٠ $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٣} + \text{س} - ٢}{\text{س}^{٢} - ١}$

٤١ $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}} - ١}{\text{س} - ١}$

٤٢ $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٤\text{س} - ٣} - ٣}{\text{س} - ٣}$

٤٣ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س} + ١} - ١}{\text{س}}$

٤٤ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٩\text{س} + ١٦} - ٤}{\text{س}}$

٤٥ $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٧} - ١}{\text{س} - ١}$

٤٦ $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٤} - ١٦}{\text{س} - ٢}$

٤٧ $\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٣} - ٦٤}{\text{س} - ٤}$

٤٨ $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٥} - ٢٤٣}{\text{س} - ٣}$

٤٩ $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٧} - ١٢٨}{٢\text{س} - ٤}$

٥٠ $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٦} - ٦٤}{\text{س}^{٥} - ٣٢}$

٥١ $\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{س}^{٣} - ١٢٨}{\text{س}^{٢} - ١٦}$

٥٢ $\underset{\text{س} \to \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{٣٢\text{س}^{٥} - ١}{١٦\text{س}^{٤} - ١}$

٥٣ $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{\frac{٧}{٢}} - \text{س}^{\frac{١}{٢}}}{\text{س}^{٢} - \text{س}}$

٥٤ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} + ١)^{٩} - ١}{\text{س}}$

٥٥ $\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(٣ + \text{هـ})^{٤} - ٨١}{٦\text{هـ}}$

٥٦ $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} + ٢)^{٤} - ٨١}{\text{س} - ١}$

٣-٣

نهاية الدالة عند اللانهاية

Limit of a Function at Infinity

سوف تتعلم

- نهاية الدالة عند اللانهاية
- إيجاد نهاية الدالة عند اللانهاية باستخدام الحل الجبرى.
- إيجاد نهاية الدالة عند اللانهاية باستخدام الحل البياني.

المصطلحات الأساسية

- نهاية دالة عند اللانهاية.

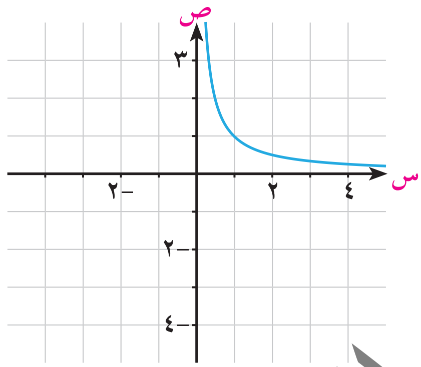
Limit of a Function at Infinity

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

نحتاج فى كَثيرٍ من التطبيقات العمليَّة والحياتية إلى مَعرفة سلوك الدالة د(س) عندما $\text{س} \longrightarrow \infty$ والنشاط التالى يوضِّح ذلك.

نشاط



استخدم أحد برامج الحاسوب فى رسم الدالة د حيث: $\text{د(س)} = \frac{١}{\text{س}}$ ، $\text{س} > ٠$

ماذا تُلاحظ من منحنى الشكل إذا ازدادت قيم س الموجبة حتى تَقترب من ما لانهاية؟

من الشكل المرسوم نُلاحظ أنَّ:

- إنه كلما زادت قيم س واقتربت من مالا نهاية اقتربت قيم د(س) من الصفر، لذلك نَقول إنَّ نهاية د(س) عندما تقترب س من ما لانهاية تُساوى صفر.

تعلم

نهاية دالة عند اللانهاية *Limit of a Function at Infinity*

نظرية

$$\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـــا}} \frac{١}{\text{س}} = ٠$$

نتيجة

$$\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـــا}} \frac{\text{أ}}{\text{س}^{\text{ن}}} = ٠ \qquad \{\text{حيث ن} \in \text{ع}^{+}\text{، أ ثابت}\}$$

قواعد أساسية:

- $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـــا}} \text{جـ} = \text{جـ}$ ، حيث جـ ثابت
- إذا كان ن عددًا موجبًا أكبر من الواحد فإنَّ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـــا}} \text{س}^{\text{ن}} = \infty$

لاحظ أن: نَظرية (٢) المتعلقة بنهاية مجموع أو فرق أو ضَرب أو قسمة دالتين عند $\text{س} \longrightarrow \text{أ}$ السابق دراستها في الدرس السابق صحيحة عندما $\text{س} \longrightarrow \infty$

مكتبة مستشار الرياضيات في مصر

مثال

① أوجد:

أ $\lim_{س \to \infty} (\frac{١}{س} + ٣)$

ب $\lim_{س \to \infty} (٤ - \frac{٣}{س^{٢}})$

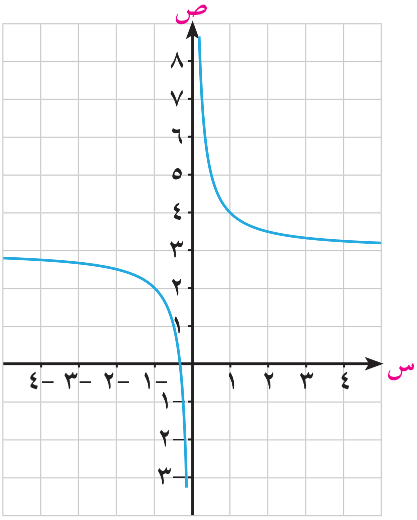
➤ ثم تَحقق من ذلك بيانيًّا باستخدام أحد البرامج الرسومية.

الحل

أ $\lim_{س \to \infty} (\frac{١}{س} + ٣) = \lim_{س \to \infty} \frac{١}{س} + \lim_{س \to \infty} ٣$

$= ٠ + ٣ = ٣$

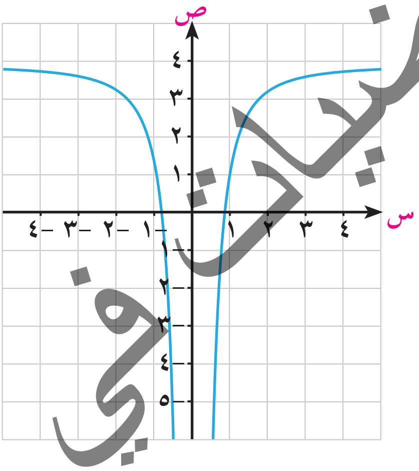
$\therefore \lim_{س \to \infty} (\frac{١}{س} + ٣) = ٣$



ب $\lim_{س \to \infty} (٤ - \frac{٣}{س^{٢}}) = \lim_{س \to \infty} ٤ - \lim_{س \to \infty} \frac{٣}{س^{٢}}$

$= ٤ - ٣ \lim_{س \to \infty} \frac{٣}{س^{٢}} = ٤ - ٣ \times ٠ = ٤$

$\therefore \lim_{س \to \infty} (٤ - \frac{٣}{س^{٢}}) = ٤$



حاول أن تحل

① أوجد:

أ $\lim_{س \to \infty} (\frac{٥}{س} + ٢)$

ب $\lim_{س \to \infty} (\frac{٢}{س^{٢}} + ٥)$

مثال

② أوجد: $\lim_{س \to \infty} (س^{٣} + ٤ س - ٥)$

الحل

$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} (\text{س}^{٣} + ٤\text{س} - ٥) = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \text{س}^{٣} (١ + \frac{٤}{\text{س}^{٢}} - \frac{٥}{\text{س}^{٣}})$ وذلك بأخذ $\text{س}^{٣}$ عامل مشترك

$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \text{س}^{٣} \times \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} (١ + \frac{٤}{\text{س}^{٢}} - \frac{٥}{\text{س}^{٣}}) = \infty \times ١ = \infty$

حاول أن تحل

٢ أوجد كلًّا من النهايات الآتية:

أ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} (\text{س}^{٣} + ٧\text{س}^{٢} + ٢)$

ب $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} (٤ - ٣\text{س} - \text{س}^{٣})$

مثال

٣ أوجد كلًّا من النهايات الآتية:

أ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س} - ٣}{٣\text{س}^{٢} + ١}$

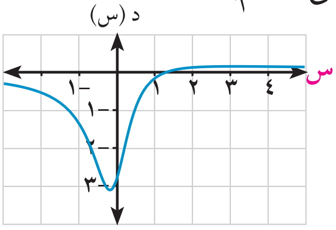
ب $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س}^{٢} - ٣}{٣\text{س}^{٢} + ١}$

ج $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س}^{٣} - ٣}{٣\text{س}^{٢} + ١}$

الحل

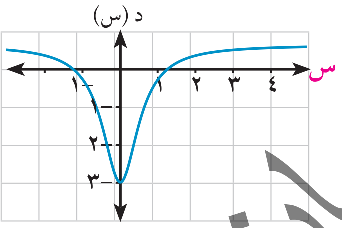
فى كل الحالات نقسم كل من البسط والمقام على $\text{س}^{٢}$ (أعلى قوة للمتغير س فى المقام).

أ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س} - ٣}{٣\text{س}^{٢} + ١} = \frac{\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} (\frac{٢}{\text{س}} - \frac{٣}{\text{س}^{٢}})}{\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} (٣ + \frac{١}{\text{س}^{٢}})} = \frac{٠ - ٠}{٣ + ٠} = ٠$



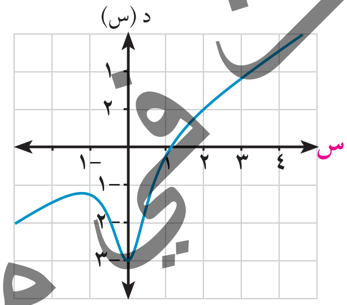
ب $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س}^{٢} - ٣}{٣\text{س}^{٢} + ١} = \frac{\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} (\frac{٢}{\text{س}} - \frac{٣}{\text{س}^{٢}})}{\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} (٣ + \frac{١}{\text{س}^{٢}})}$

$= \frac{٢ - ٠}{٣ + ٠} = \frac{٢}{٣}$



ج $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س}^{٣} - ٣}{٣\text{س}^{٢} + ١} = \frac{\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} (٢\text{س} - \frac{٣}{\text{س}^{٢}})}{\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} (٣ + \frac{١}{\text{س}^{٢}})}$

$= \frac{\infty - ٠}{٣ + ٠} = \infty$



نستنتج من هذا المثال أنَّ: عند إيجاد $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{د(س)}}{\text{ر(س)}}$ حيث كل من د(س)، ر(س) دوال كثيرات الحدود فإن:

- النهاية تعطى عددًا حقيقيًّا لا يساوى الصفر إذا كانت درجة البسط تساوى درجة المقام.
- النهاية تُساوى صفرًا إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام.
- النهاية تعطى (∞ أو - ∞) إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام.

مكتب مستشار الرياضيات فى مصر

حاول أن تحل

③ أوجد:

أ $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \frac{٥س^{٢} - ٣س + ١}{٢س}$ ب $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \frac{٤س^{٣} - ٥س}{٨س^{٤} + ٣س^{٢} - ٢}$ جـ $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \frac{-٦س^{٢} + ١}{٣س^{٢} + س - ٢}$

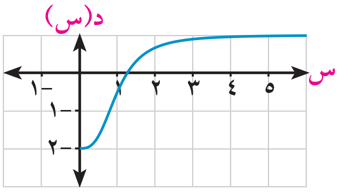
مثال

④ أوجد النهايات الآتية:

أ $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \frac{س^{٣} - ٢}{|س|^{٣} + ١}$ ب $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} (س - \sqrt{س^{٢} + ٤})$

الحل

أ $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \frac{س^{٣} - ٢}{|س|^{٣} + ١}$



$د(س) = \frac{س^{٣} - ٢}{|س|^{٣} + ١}$

$\because$ $س \longrightarrow \infty$

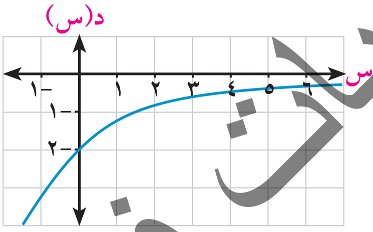
$\therefore$ $س > ٠$ أيْ أنَّ $|س| = س$

$\therefore$ $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \frac{س^{٣} - ٢}{س^{٣} + ١}$

بقسمة كلٍّ من البسط والمقام على $س^{٣}$

$$= \frac{\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} (١ - \frac{٢}{س^{٣}})}{\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} (١ + \frac{١}{س^{٣}})} = \frac{١ - ٠}{١ + ٠} = ١$$

ب $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} (س - \sqrt{س^{٢} + ٤})$



$د(س) = س + \sqrt{س^{٢} + ٤}$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \frac{(س - \sqrt{س^{٢} + ٤})}{١} \times \frac{(س + \sqrt{س^{٢} + ٤})}{(س + \sqrt{س^{٢} + ٤})}$$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \frac{س^{٢} - س^{٢} - ٤}{س + \sqrt{س^{٢} + ٤}}$$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \frac{-٤}{س + \sqrt{س^{٢} + ٤}}$$

$\because$ $س \longrightarrow \infty$

$\therefore$ $س > ٠ \longrightarrow \sqrt{س^{٢}} = |س| = س$ بقسمة كلٍّ من البسط والمقام على $س = \sqrt{س^{٢}}$

$$\therefore \underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \frac{-٤}{س + \sqrt{س^{٢} + ٤}} = \frac{\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} - \frac{٤}{س}}{\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} (١ + \sqrt{١ + \frac{٤}{س^{٢}}})} = \frac{٠}{١ + ١} = ٠$$

حاول أن تحل

④ أوجد النهايات الآتية:

أ $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \frac{س - ٣}{\sqrt{٤س^{٢} + ٢٥}}$ ب $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} (\sqrt{٣س^{٢} + ٥س} - \sqrt{٣}\,س)$

تمـــاريـن (٣-٣)

أكمل ما يأتى:

① $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{٣}{س}\right) =$ ....

② $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{٣}{س^{٢}} - ٢\right) =$ ....

③ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} (-٧) =$ ....

④ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(س^{٢} - ٣\right) =$ ....

⑤ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢س + ١}{س}$ ....

⑥ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣} - ٥}{س^{٢} + ١} =$ ....

⑦ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} + ٣}{س^{٣} - ٥} =$ ....

⑧ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٣س}{\sqrt{س^{٢} - ١}} =$ ....

⑨ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(٣ - \frac{٧}{س} + \frac{٤}{س^{٢}}\right) =$ ....

⑩ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{س^{٢} + ١} - س\right) =$ ....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

⑪ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٦س}{٢س + ٣}$ تُساوى:

أ صفر　ب ٢　ج ٣　د ∞

⑫ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \sqrt{\frac{٤}{س} + ١}$

أ صفر　ب ١　ج ٢　د ∞

⑬ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{س + ٣}{٢ - س^{٢}}$

أ صفر　ب $\frac{١}{٢}$　ج $\frac{٣}{٢}$　د ∞

⑭ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} + ١}{٢س - ١}$

أ صفر　ب $\frac{١}{٢}$　ج ١　د ∞

⑮ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \sqrt{\frac{١ + س}{٤س - ١}}$

أ -١　ب $\frac{١}{٤}$　ج $\frac{١}{٢}$　د ١

إيجاد نهاية الدالة عند اللانهاية

⑯ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٣}{س^{٢}}$

⑰ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(س^{٣} + ٥س^{٢} + ١\right)$

⑱ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢ - ٧س}{٢ + ٣س}$

⑲ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢}}{س + ٣}$

⑳ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٤س^{٢}}{س^{٢} + ٣}$

㉑ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٥ - ٦س - ٣س^{٢}}{٢س^{٢} + س + ٤}$

㉒ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢س - ١}{س^{٢} + ٤س + ١}$

㉓ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣} - ٢}{٣س^{٢} + ٤س - ١}$

㉔ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢س^{٢} - ١}{٤س^{٣} - ٥س - ١}$

㉕ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢س^{٢} - ٦}{(س - ١)^{٢}}$

㉖ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(٧ + \frac{٢س^{٢}}{(س + ٣)^{٢}}\right)$

㉗ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{١}{٣س^{٢}} - \frac{٥س}{س + ٢}\right)$

٢٨ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{س}}{\text{٢س} + ١} + \frac{\text{٣س}^{٢}}{(\text{س} - ٣)^{٢}} \right)$

٢٩ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{-\text{س}}{\sqrt{٤ + \text{س}^{٢}}}$

٣٠ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{\text{٤س}^{٢} - \text{٢س} + ١} - \text{٢س} \right)$

٣١ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{\text{٥س}^{٢} + \text{٤س} + ٧} - \sqrt{\text{٥س}^{٢} + \text{س} + ٣} \right)$

٣٢ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢} + \text{س} - ١}{\text{٨س}^{٢} - ٣}$

٣٣ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٤ - \text{٣س}^{٣}}{\sqrt{\text{س}^{٦} + ٩}}$

تفكير ابداعى

تنتج إحدى الشركات بطاقات معايدة بتكلفة ابتدائية قَدْرها ٥٠٠٠ جنيه، وتكلفة لكل كارت نصف جنيه فكانت التكلفة الإجمالية $\text{جـ} = \frac{١}{٢}\text{س} + ٥٠٠٠$ حيث س عدد البطاقات المنتجة.

أوجد:

① تكلفة إنتاج الكارت عند إنتاج:

أ ١٠٠٠٠ كارت

ب ١٠٠٠٠٠ كارت

② أوجد تكلفة إنتاج الكارت عندما تنتج الشركة عددًا لانهائى من الكروت.

نشاط

استخدام التكنولوجيا في إيجاد نهاية دالة عند نقطة (الحاسبة البيانية)

استخدم الحاسبة البيانية في رسم كل من الدوال الآتية، **ثم أوجد نهاية كل دالة عند النقطة المبينة:**

أ $\text{د(س)} = \text{س}^{٣}$ عند س = صفر

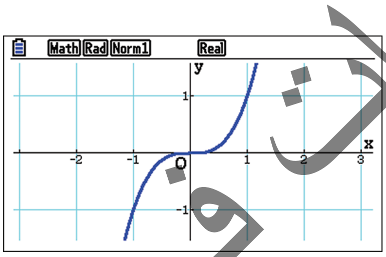
ب $\text{د(س)} = \frac{\text{س}^{٣} - ١}{\text{س} - ١}$ عند س = ١

جـ $\text{د(س)} = \frac{\text{جا}^{٢}\text{٢س}}{\text{س}^{٢}}$ عند س = صفر

الحل

أ باستخدام الحاسبة البيانية نمثل منحنى الدالة $\text{د(س)} = \text{س}^{٣}$

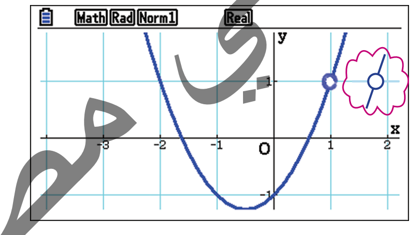
من الرسم $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \text{د(س)} = \text{صفر}$



ب باستخدام الحاسبة البيانية نمثل منحنى الدالة

$\text{د(س)} \left(\frac{\text{س}^{٣} - ١}{\text{س} - ١} \right) - ٢$

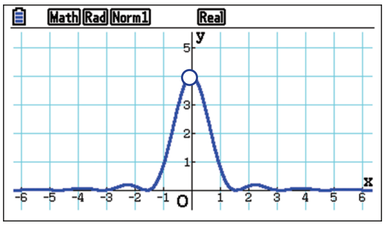
من الرسم $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \text{د(س)} = ١$ (لاحظ الفجوة عند النقطة (١ ، ١))



جـ باستخدام الحاسبة البيانية نمثل منحنى الدالة

$\text{د(س)} = \frac{\text{جا}^{٢}\text{٢س}}{\text{س}^{٢}}$

من الرسم نجد أن $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^{٢}\text{٢س}}{\text{س}^{٢}} = ٤$



مُلَخَّصُ الوَحْدَةِ

- تجرى العمليات الحسابية على مجموعة الأعداد الحقيقية والرمزين ∞ ، - ∞ كالآتى:

لكل أ ∈ ع فإن:

① ∞ + أ = ∞ ② -∞ + أ = - ∞

③ ∞ × أ = { ∞ ، إذا كان أ > ٠ ؛ -∞ ، إذا كان أ < ٠ }

④ -∞ × أ = { -∞ ، إذا كان أ > ٠ ؛ ∞ ، إذا كان أ < ٠ }

- إذا كانت قيمة الدالة د تقترب من قيمة وحيدة ل ، عندما تقترب س من أ من جهتى اليمين واليسار، فإن نهاية د(س) تساوى ل **وتكتب رمزيًا:** $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهــا}}$ د(س) = ل **وتقرأ:** نهاية د(س) عندما تقترب س من أ تساوى ل

- إنَّ وجود نهاية للدالة عندما س ⟵ أ لايعنى بالضرورة أن تكون الدالة معرفة عند س = أ، والعكس إذا كانت معرفة عند س = أ فهذا لايعنى وجود نهاية للدالة عند س = أ.

- **إذا كانت** $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهــا}}$ د(س) = ل ، $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهــا}}$ ى(س) = م فإن:

① $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهــا}}$ ك د(س) = ك.ل حيث ك ∈ ع

② $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهــا}}$ [د(س) ± ى(س)] = ل ± م

③ $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهــا}}$ د(س) . ى(س) = ل.م

④ $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهــا}}$ $\frac{\text{د(س)}}{\text{ى(س)}} = \frac{\text{ل}}{\text{م}}$ بشرط م ≠ ٠

⑤ $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهــا}}$ $(\text{د(س)})^{\text{ن}} = \text{ل}^{\text{ن}}$ حيث $\text{ل}^{\text{ن}}$ ∈ ع

- نهاية الدالة عند اللا نهاية.

① $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهــا}}$ $\frac{١}{\text{س}} = ٠$

② $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهــا}}$ $\frac{\text{أ}}{\text{س}^{\text{ن}}} = ٠$ {حيث ن ∈ ع_+، أ ثابت}

③ $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهــا}}$ جـ = جـ ، حيث جـ ثابت إذا كان ن عددًا صحيحًا موجبًا فإن $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهــا}}$ $\text{س}^{\text{ن}} = \infty$

- عند إيجاد $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهــا}}$ $\frac{\text{د(س)}}{\text{ر(س)}}$ حيث كل من د(س)، ر(س) دوال كثيرات الحدود فإن:

① النهاية تعطى عددًا حقيقيًّا لايساوى الصفر إذا كانت درجة البسط = درجة المقام.

② النهاية تساوى صفرًا إذا كانت درجة البسط أقل درجة المقام.

③ النهاية تعطى ± ∞ إذا كانت درجة البسط أكبر درجة المقام.

- عند إجراء عملية القسمة المطولة يجب مراعاة مايأتى:

① ترتيب حدود كل من المقسوم والمقسوم عليه ترتيبًا تصاعديًّا ، وتنازليا بنفس النظام.

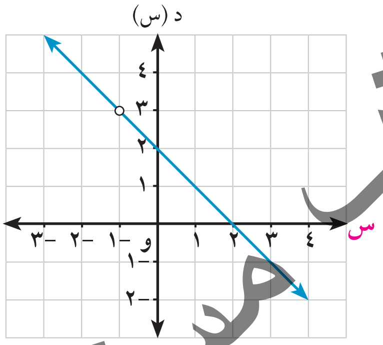
② نَقسم الحدِّ الأول من المقسوم على الحدِّ الأول من المقسوم عليه وتكتب ناتج القسمة.

③ نضرب ناتج القسمة فى المقسوم عليه ويُطَرح الناتج من المقسوم للحصول على الباقى.

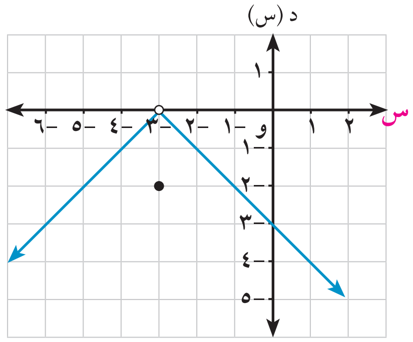
④ نستمر بنفس الطريقة حتى الانتهاء من عملية القسمة.

تمارين عامة

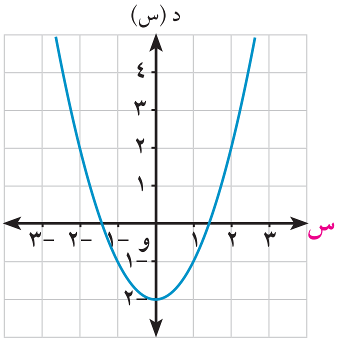
① من الشكل البيانى المقابل أكمل:



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

$\underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـــا}} (-\text{س} + ٢)$ ....

$\text{د}(-١)$ ....

$\underset{\text{س} \to -٣}{\text{نهـــا}} \text{د}(\text{س})$ ....

$\text{د}(-٣)$ ....

$\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـــا}} (\text{س}^٢ - ٢)$ ....

$\text{د}(٠)$ ....

② أكمل الجدول الآتى واستنتج $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^٢ - ١}{\text{س} - ١}$

س	٠,٩	٠,٩٩	٠,٩٩٩	⟵	١	⟶	١,٠٠١	١,٠١	١,١
د(س)	....	....	....	⟵	....	⟶	....	....	....

③ إذا كانت الدالة د معرفة كالآتى: $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{س}^٢ - \text{س} - ٢}{\text{س} - ٢} & \text{حيث س} \neq ٢ \\ \text{ك} & \text{عند س} = ٢ \end{cases}$

كون جدولا لبحث قيم الدالة عندما س ⟵ ٢ ثم أوجد قيمة ك إذا كان $\text{د}(٢) = \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^٢ - \text{س} - ٢}{\text{س} - ٢}$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

④ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^٢ + \text{س}}{\text{س}}$ تُساوى:

أ صفر **ب** ١ **ج** ٢ **د** ٣

⑤ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^٣ + ٢}{\text{س}^٢ + ١}$ تُساوى:

أ ١ **ب** ٢ **ج** صفر **د** ∞

⑥ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـــا}} (\sqrt{\text{س}^٢ + ١} - \text{س})$ تُساوى:

أ -١ **ب** صفر **ج** ١ **د** ∞

أوجد قيمة كلٍّ من النهايات الآتية إنْ وجدت :

⑦ $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س} + ٧}{\text{س} + ٢}$

⑧ $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـــا}} \frac{\sqrt{\text{س}} - ١}{\text{س} - ١}$

⑨ $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^٣ - ٢٧}{\text{س} - ٣}$

⑩ $\underset{\text{س} \to ٨}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^٢ - ٦\text{س} - ١٦}{\text{س} - ٨}$

⑪ $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^٧ - ١٢٨}{\text{س}^٣ - ٨}$

⑫ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـــا}} \frac{(\text{س} + ١)^{١٠} - ١}{\text{س}}$

⑬ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـــا}} \frac{٣\text{س}^٣ - ١}{\text{س}^٢ + ١}$

⑭ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـــا}} \frac{٧\text{س}^٣ - ٥}{٣\text{س}^٢ - \text{س}}$

⑮ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـــا}} \frac{٢\text{س}^٢ + ٥\text{س} + ١}{٣\text{س}^٢ - ٧}$

اختبار تراكمى

① ضَع كُلَّ كَسرٍ من الكسور الجبريَّةِ الآتية فى أَبسطِ صورة :

أ $\frac{س}{س^{٢} - س}$ ب $\frac{س + ١}{س^{٢} + ٢س + ١}$ ج $\frac{س^{٢} - ٢٥}{(س - ٥)^{٢}}$ د $\frac{س + ٣}{س^{٣} - ٩س}$

② إذا كان $ن_{١}(س) = \frac{٢س}{٢س + ٨}$ ، $ن_{٢}(س) = \frac{س^{٢} + ٤س}{س^{٢} + ٨س + ١٦}$ هل $ن_{١}(س) = ن_{٢}(س)$؟ فسر إجابتك.

③ إذا كان $ن_{١}(س) = \frac{٤}{س + ١}$ ، $ن_{٢}(س) = \frac{٣}{س - ١}$ فأوجد $ن(س) = ن_{١}(س) + ن_{٢}(س)$ مبينًا مجال ن.

④ أوجد أَبسط صورةٍ للدالة د حيث $د(س) = \frac{١}{س + ١} + \frac{١}{س - ١}$ مبينًا مجالها.

⑤ أوجد أَبسط صورةٍ للدالة ر حيث $ر(س) = \frac{س^{٢} - ١}{س^{٢}} + \frac{س + ٥}{٣س}$ مبينًا مجالها .

⑥ اكتب التعبير الرمزى للجملة الرياضية الآتية:

إذا اقتربت د(س) من ل (ل ∈ ع) حينما تقترب س من أ فإن ل تعرف كنهاية لـ د(س) عندما تقترب س من أ.

⑦ إذا كانت $د(س) = \frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ فادرس قيم د(س) عندما تقترب س من ١

⑧ إذا كانت الدالة د حيث
$$د(س) = \begin{cases} س & \text{عندما } س < ٢ \\ س + ٢ & \text{عندما } س \geq ٢ \end{cases}$$

ارسم منحنى هذه الدالة، ثم ابحث وجود $\lim\limits_{س \to ٢} د(س)$

⑨ أعط أمثلة عَددية تُوضِّح فيها مايأتى:

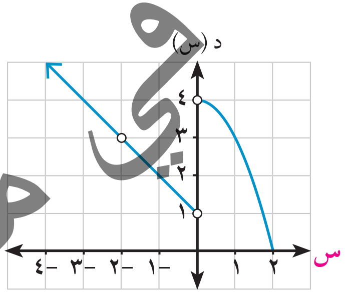
أ وجود نهاية للدالة عندما $س \to ١$ لا يعنى بالضرورة أنْ تكون الدالةُ معرفة عند س = ١

ب إذا كانت الدالة معرفة عند س = ١ فهذا لا يعنى وجود نهاية للدالة.

⑩ فى الشكل المقابل أوجد :

أ د(٠)   ب $\lim\limits_{س \to ٠} د(س)$

ج د(-٢)   د $\lim\limits_{س \to -٢} د(س)$



⑪ أوجد النهايات الآتية إنْ وُجِدَت:

أ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٧س}{٢س + ٥}$ ب $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٤س^{٢}}{٣ - س}$ ج $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{|س|}{س}$ د $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\frac{س^{٢} + ١ - س}{س}\right)$

ه $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٥س + ٦}{س - ٢}$ و $\lim\limits_{س \to ١} \frac{\sqrt{س + ٣} - ٢}{س - ١}$

x²
log
10ˣ
eˣ
ln
sin⁻¹
D
sin
cos
tan
E
F
x!

الوحدة الرابعة

حساب المثلثات

Trigonometry

مقدمة الوحدة

علم حساب المثلثات (باللاتيني Trigonometry) هو أحد فروع مادة الرياضيات بوجه عام والهندسة العامة بوجه خاص حيث يوجد العلاقة بين أطوال أضلاع المثلث وقياسات زواياه في صورة دوال مثلثية (دالة الجيب، دالة جيب التمام، دالة الظل، ....)، وكان قدماء المصريين أول من عمل بقواعد حساب المثلثات، إذ استخدموها في بناء الأهرامات وبناء معابدهم، ترجع معرفتنا لعلم حساب المثلثات إلى الأغريق الذين وضعوا قوانينها وصاغوا نظرياتها، كما قدم البيروني برهانًا لمساحة المثلث بدلالة أطوال أضلاعه. كما أن الغرب عرفوا هندسة أقليدس عن طريق العرب. ومن مآثر العرب في حساب المثلثات هو استخدامهم النسب المثلثية الست حيث كشف التباني العلاقة الخاصة بالمثلث الكروي القائم الزاوية كما اكتشف قانون إيجاد ارتفاع الشمس.

لعلم حساب المثلثات تطبيقات كثيرة في حساب المسافات والزوايا التي تستخدم في إنشاء المباني والملاعب الرياضية والطرق وفي صناعة المحركات والأجهزة الكهربية والميكانيكية، كما يستخدم حساب المثلثات في حساب المسافات الجغرافية والفلكية وفي أنظمة الاستكشافات بالأقمار الصناعية.

مخرجات تعلم الوحدة :

في نهاية هذه الوَحْدةِ وتنفيذا للأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن:

- ◈ يَتعرف قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث، والذى يَنص على أنه فى أىِّ مثلث تَتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها.
- ◈ يَستخدم قانون (قاعدة) الجيب فى إيجاد أطوال أضلاع أى مثلث.
- ◈ يَستخدم قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث فى إيجاد قياسات زوايا هذا المثلث .
- ◈ يَستنتج العلاقة بين قانون (قاعدة) الجيب لأىِّ مثلث وطول نِصف قُطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث.
- ◈ يَتعرف قانون (قاعدة) جيب التمام لأى مثلث.
- ◈ يستخدم قانون (قاعدة) جيب التمام لأى مثلث فى إيجاد طول ضلع مجهول فى هذا المثلث.
- ◈ يستخدم قانون (قاعدة) جيب التمام لأى مثلث فى إيجاد قياس زاوية مجهولة فى هذا المثلث.
- ◈ يستخدم قانون (قاعدة) الجيب وجيب التمام لأى مثلث فى حل هذا المثلث
- ◈ يستخدم الآلة الحاسبة فى حل تمارين وأنشطة متنوعة على قانون (قاعدة الجيب، وجيب التمام) لأى مثلث.

المصطلحات الأساسية

حساب مثلثات	*Trigonometry*
قاعدة الجيب	*Sine Rule*
قاعدة جيب التمام	*Cosine Rule*
زاوية حادة	*Acute Angle*
زاوية منفرجة	*Obtuse Angle*
زاوية قائمة	*Right Angle*
أقصر ضلع	*Shortest Side*
أطول ضلع	*Longest Side*
طول ضلع مجهول	*Missing Length*
زاوية مجهولة	*UnKnown Angle*
أصغر زاوية	*Smallest Angle*
أكبر زاوية	*Largest Angle*
مساحة المثلث	*The Area of the Triangle*
أطوال أضلاع المثلث	*The Sides Lenghtes of a Triangle*
زاوية مقابلة	*The Opposite Angle of an Side*

دروس الوحدة

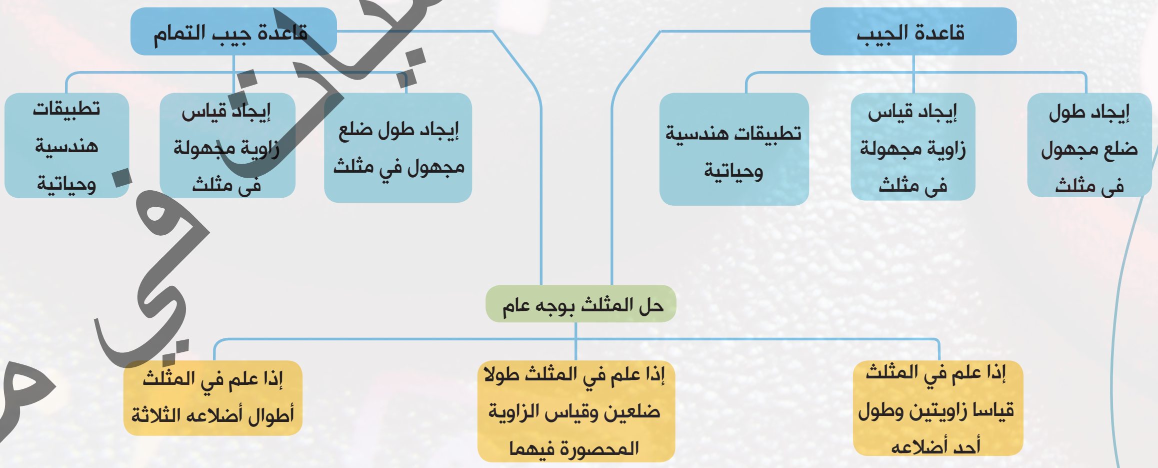
الدرس (٤-١): قانون (قاعدة) الجيب

الدرس (٤-٢): قانون (قاعدة) جيب التمام

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية

مخطط تنظيمى للوحدة


قاعدة الجيب
إيجاد طول ضلع مجهول فى مثلث
إيجاد قياس زاوية مجهولة فى مثلث
تطبيقات هندسية وحياتية
قاعدة جيب التمام
إيجاد طول ضلع مجهول في مثلث
إيجاد قياس زاوية مجهولة فى مثلث
تطبيقات هندسية وحياتية
حل المثلث بوجه عام
إذا علم في المثلث قياسا زاويتين وطول أحد أضلاعه
إذا علم في المثلث طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة فيهما
إذا علم في المثلث أطوال أضلاعه الثلاثة

٤-١ قانون (قاعدة) الجيب

The Sine Rule

مكتبة مستشار الرياضيات في مصر

سوف تتعلم

- قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث.
- استخدام قانون (قاعدة) الجيب فى حل المثلث.
- نمذجة وحل مشكلات رياضية وحياتية باستخدام قاعدة الجيب.
- العلاقة بين قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث وطول نصف قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث وحل مسائل عليها

المصطلحات الأساسية

قاعدة الجيب	*Sine Rule*
زاوية حادة	*Acute Angle*
زاوية منفرجة	*Obtuse Angle*
زاوية قائمة	*Right Angle*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية

تذكر أن

الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس في الدائرة متساوية في القياس.

الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة قائمة.

تمهيد

سبق أن تَعلَّمت كيفية حل المثلث القائم الزاوية، والآن سوف نتعامل مع مثلثات غير قائمة الزوايا لتتعلم كيفية إيجاد أطوال أضلاع وقياسات زوايا هذه المثلثات.

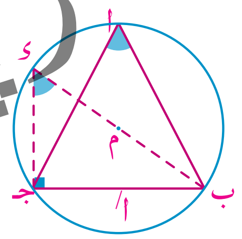
تعلم أنَّ كل مثلث يتكون من ستة عناصر، ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا، و إذا أعطيت أى ثلاثة عناصر منها (على أن يكون من بينها طول أحد الأضلاع على الأقل) فإنه يمكنك إيجاد العناصر الثلاثة الأخرى، وذلك باستخدام قانونى الجيب وجيب التمام، وعندئذ نقول: إنه أمكننا حل المثلث.

تعلم

قانون (قاعدة) الجيب *The Sine Rule*

تمثل الأشكال الآتية ثلاثة أنواع من المثلثات.

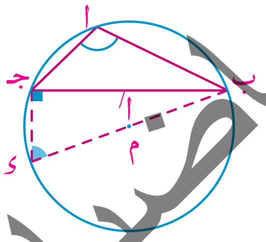
حاد الزاوية



شكل (١)

$ق(\angle أ) = ق(\angle ى)$

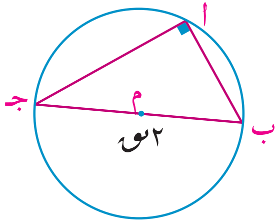
منفرج الزاوية



شكل (٢)

$ق(\angle أ) = ١٨٠° - ق(\hat{ى})$

قائم الزاوية



شكل (٣)

$ق(\angle أ) = ٩٠°$

فى الشكل (١) حيث △ أ ب جـ حاد الزوايا جا أ $=$ جا ى $= \frac{أ/}{٢نق}$

وبالمثل يمكن استنتاج أن جا ب $= \frac{ب/}{٢نق}$، جا جـ $= \frac{جـ/}{٢نق}$

فى الشكل (٢) حيث △ أ ب جـ منفرج الزاوية فى أ

جا أ = جا (١٨٠° - ى) = جا ى

[**لاحظ أن**: جا (١٨٠° - ى) = جا ى]

جا ى $= \frac{أ/}{٢نق}$ ∴ جا أ $= \frac{أ/}{٢نق}$

وبالمثل يمكن استنتاج أنَّ

جا ب $= \frac{ب/}{٢نق}$ ، جا جـ $= \frac{جـ/}{٢نق}$ **«استعن بمعلمك لاثبات صحة ذلك»**

لاحظ أن

أ/ ، ب/، جـ/ رموز لأطول الأضلاع $\overline{ب جـ}$، $\overline{أ جـ}$ ، $\overline{أ ب}$ فى △أ ب جـ على الترتيب.

والآن: حاول إثبات نفس العلاقة السابقة في △ أ ب جـ القائم الزاوية فى أ

وبصفة عامة قانون (قاعدة) الجيب فى المثلث أ ب جـ هى:

$$\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}} = ٢\text{نق}$$ حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث.

أي أن: في أي مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها.

تعلم ذاتى

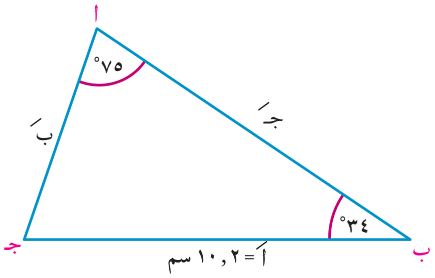
أثبت قانون الجيب بطرق أخرى

استخدم قانون (قاعدة) الجيب في إيجاد أطوال أضلاع أي مثلث:

مثال

① فى المثلث أ ب جـ إذا كان ق(∠أ) = ٧٥°، ق(∠ب) = ٣٤°، أَ = ١٠,٢سم، أوجد كلًّا من بَ، جـَ لأقرب عدد صحيح.

الحل



∵ ق(∠أ) + ق(∠ب) + ق(∠جـ) = ١٨٠°

∴ ق(∠جـ) = ١٨٠° - (٧٥° + ٣٤°)

= ٧١°

نستخدم قاعدة الجيب لإيجاد بَ، جـَ

$$\because \frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}} \qquad \therefore \frac{١٠,٢}{\text{جا } ٧٥°} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا } ٣٤°} = \frac{\text{جـَ}}{\text{جا } ٧١°}$$

$$\text{ب}/ = \frac{١٠,٢ \times \text{جا } ٣٤°}{\text{جا } ٧٥°} \simeq ٦\text{سم}$$ باستخدام الآلة الحاسبة

ابدأ → 1 0 . 2 × sin 3 4 ,,,) ÷ sin 7 5 ,,,) =

$$\text{جـَ} = \frac{١٠,٢ \times \text{جا } ٧١°}{\text{جا } ٧٥°} \simeq ١٠\text{سم}$$ باستخدام الآلة الحاسبة

ابدأ → 1 0 . 2 × sin 7 1 ,,,) ÷ sin 7 5 ,,,) =

؟ حاول أن تحل

① فى المثلث أ ب جـ إذا كان ق(∠جـ) = ٦١°، ق(∠ب) = ٧١°، بَ = ٩١سم، فأوجد كل من أَ ، جـَ

إيجاد طول أكبر ضلع فى المثلث

تذكر أن

أكبر ضلع فى المثلث هو الضلع المقابل لأكبر زاوية والعكس أصغر زاوية فى المثلث هى المقابلة لأصغر ضلع.

مثال

② أوجد طول أكبر ضلع فى المثلث أ ب جـ الذى فيه ق (∠أ) = ٤٩° ١١َ ، ق(∠ب) = ٧٦° ١٧َ ، جـَ = ١١,٢٢سم مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

مكتبة مستشار الرياضيات في مصر

الحل

∵ ق(∠جـ) = ١٨٠° - [ق(∠أ) + ق(∠ب)]

= ١٨٠° - (١١َ ٤٩° + ١٧َ ٧٦°) = ٣٢َ ٥٤°

∴ أكبر ضلع هو المقابل لزاوية ب، أىْ أنّ المطلوب هو إيجاد بَ

$$∵ \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}} \qquad ∴ \frac{\text{بَ}}{\text{جا ١٧َ ٧٦°}} = \frac{١١,٢٢}{\text{جا ٣٢َ ٥٤°}}$$

$$∴ \text{بَ} = \frac{١١,٢٢ \times \text{جا ١٧َ ٧٦°}}{\text{جا ٣٢َ ٥٤°}} \simeq ١٣,٣٨\text{سم}$$

؟ حاول أن تحل

② أوجد طول أصغر ضلع فى المثلث أ ب جـ، الذى فيه ق(∠أ) = ٤٣°، ق(∠ب) = ٦٥°، جـَ = ٨,٤سم مقربًا الناتج لرقم عشري واحد.

حل المثلث باستخدام قانون الجيب *Solving the Triangle Using the Sine Rule*

المقصود بحل المثلث هو إيجاد قياسات العناصر المجهولة فيه إذا عُلِمَ منه ثلاثة عناصر من العناصر الستة بشرط أنْ يكون من بين العناصر المعلومة طول أحد الأضلاع على الأقل، لأنه لايمكن حل المثلث إذا عُلِمَ منه قياسات ثلاث زوايا، ويسمح لنا قانون الجيب بحل المثلث، إذا عُلِمَ منه قياسا زاويتين وطول أحد أضلاعه.

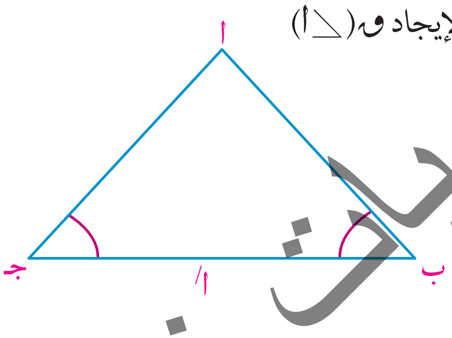
حل المثلث إذا عُلِمَ منه قياسا زاويتين وطول أحد أضلاعه:

لاحظ أنه لحل المثلث أ ب جـ إذا عُلِمَ فيه قياسا الزاويتين ب، جـ والطول أَ نتبع التالى:

١- نستخدم العلاقة ق(∠أ) + ق(∠ب) + ق(∠جـ) = ١٨٠° لإيجاد ق(∠أ)

٢- نستخدم قانون الجيب: $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}}$ لإيجاد بَ

٣- نستخدم قانون الجيب: $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}}$ لإيجاد جـَ

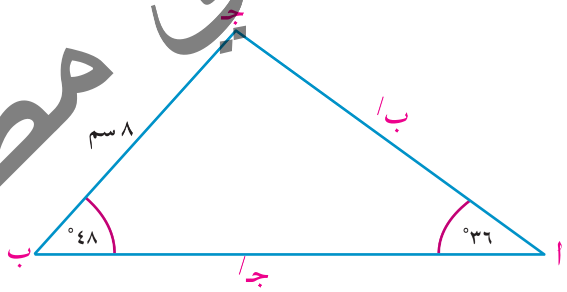


وفيما يلى أمثلة توضِّح ذلك:

مثال

③ حل المثلث أ ب جـ الذى فيه ق(∠أ) = ٣٦°، ق(∠ب) = ٤٨°، أَ = ٨سم مقربًا الناتج لأقرب ثلاثة أرقام عشرية.

الحل



نوجد ق(∠جـ) من العلاقة:

ق(∠جـ) = ١٨٠° - (٣٦° + ٤٨°) = ٩٦°

نوجد بَ من قانون الجيب كالآتي:

$$∵ \frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} \qquad ∴ \frac{٨}{\text{جا ٣٦°}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ٤٨°}}$$

$$∵ \text{بَ} = \frac{٨ \times \text{جا ٤٨°}}{\text{جا ٣٦°}} \qquad ∴ \text{بَ} \simeq ١٠,١١٥\text{سم}$$

وذلك باستخدام الآلة الحاسبة كالآتى:

ابدأ → 8 × sin 4 8 ÷ sin 3 6 =

∵ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}}$ ∴ $\frac{٨}{\text{جا } ٣٦^\circ} = \frac{\text{جـَ}}{\text{جا } ٩٦^\circ}$

∴ $\text{جـَ} = \frac{٨ \times \text{جا } ٩٦^\circ}{\text{جا } ٣٦^\circ} \simeq ١٣,٥٣٥$سم

وذلك باستخدام الآلة الحاسبة كالآتى:

ابدأ ← 8 × sin 9 6 ÷ sin 3 6 =

حاول أن تحل

③ حل المثلث س ص ع فيه صَ = ١٠٧,٢سم، ق(∠س) = ٣٣° ١٦َ، ق(∠ع) = ٤٤° ١٩َ

تطبيقات هندسية *Geometrical Applications*

العلاقة بين قاعدة الجيب لأي مثلث وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس هذا المثلث

سبق أن علمنا أن: $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـَ}}{\text{جا حـ}} = ٢\text{نق}$ حيث نق نصف قطر الدائرة المارة برؤوس هذا المثلث

مثال

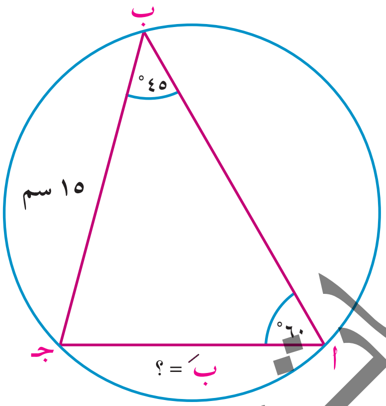
④ أ ب جـ مثلث فيه أَ = ١٥سم، ق(∠أ) = ٦٠°، ق(∠ب) = ٤٥°، أوجد جـَ وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ مقربًا الناتج لأقرب عدد صحيح.

الحل

نوجد ق(∠جـ) كالآتي:

ق(∠جـ) = ١٨٠° - [٦٠° + ٤٥°]

= ١٨٠° - ١٠٥° = ٧٥°



نستخدم قانون الجيب لإيجاد جـَ:

∵ $\frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}} = \frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}}$ ∴ $\frac{\text{جـَ}}{\text{جا } ٧٥^\circ} = \frac{١٥}{\text{جا } ٦٠^\circ}$

$\text{جـَ} = \frac{١٥ \times \text{جا } ٧٥^\circ}{\text{جا } ٦٠^\circ} \simeq ١٧$ سم

لإيجاد نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ نستخدم العلاقة:

$\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = ٢\text{نق}$ ∴ $\frac{١٥}{\text{جا } ٦٠^\circ} = ٢\text{نق}$ ∴ $٢\text{نق} \times \text{جا } ٦٠^\circ = ١٥$

∴ $\text{نق} = \frac{١٥}{٢ \text{ جا } ٦٠^\circ} \simeq ٩$سم

ابدأ ← 1 5 ÷ (2 sin 6 0) =

حاول أن تحل

④ أ ب جـ مثلث فيه ق(∠أ) = ٦٤° ٢٣َ، ق(∠ب) = ٧٢° ٢٣َ، جـَ = ١٨سم، أوجد كل من أَ ، بَ وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ.

مثال

تذكر أن

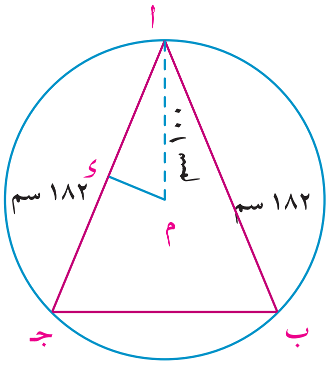
مساحة سطح المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب أى ضلعين × جيب الزاوية بينهما

⑤ أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة مركزها م، وطول نصف قُطرها ١٠٠سم فإذا كان أ ب = أ جـ = ١٨٢سم أوجد

أ طول $\overline{\text{ب جـ}}$ لأقرب رقم عشري واحد.

ب مساحة سطح المثلث أ ب جـ لأقرب سنتيمتر مربَّع.

الحل



نوجد ق(∠ب) كالآتي:

في △ أ ب جـ يكون:

$\frac{\text{أ جـ}}{\text{جا ب}} = 2\text{نق}$ (قاعدة الجيب)

$\frac{182}{\text{جا ب}} = 200$ $\text{جا ب} = \frac{182}{200} = 0{,}91$

∴ ق(∠ب) = ١٩ ″ ٣٠ ′ ٦٥°

(ق(∠ب) = ق(∠جـ) لأن المثلث أ ب جـ متساوى الساقين وكلاهما زاوية حادة)

نوجد ق(∠أ)

ق(∠أ) = ١٨٠° - ٢ × (١٩ ″ ٣٠ ′ ٦٥°) ≃ ٢٢ ″ ٥٩ ′ ٤٨°

نوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$ باستخدام قانون الجيب كالآتي:

∴ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{جا } 22'' \, 59' \, 48^\circ} = \frac{182}{\text{جا } 19'' \, 30' \, 65^\circ}$ ∴ $\text{ب جـ} = \frac{182 \times \text{جا } 22'' \, 59' \, 48^\circ}{\text{جا } 19' \, 30' \, 65^\circ} \simeq 150{,}9$ سم

ابدأ → 1 8 2 × sin 4 8 °''' 5 9 °''' 2 2 °''') ÷

sin 6 5 °''' 3 0 °''' 1 9 °''') =

مساحة المثلث أ ب جـ $= \frac{1}{2}$ أ ب × أ جـ جا أ

$= \frac{1}{2} \times 182 \times 182$ جا ٢٢ ″ ٥٩ ′ ٤٨° ≃ ١٢٤٩٧ سم^2

؟ حاول أن تحل

⑤ أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ = ١٠,٣سم، مرسوم داخل دائرة طول نصف قطرها ٨,٤سم أوجد:

أ طول القاعدة $\overline{\text{ب جـ}}$ **ب** مساحة سطح المثلث أ ب جـ

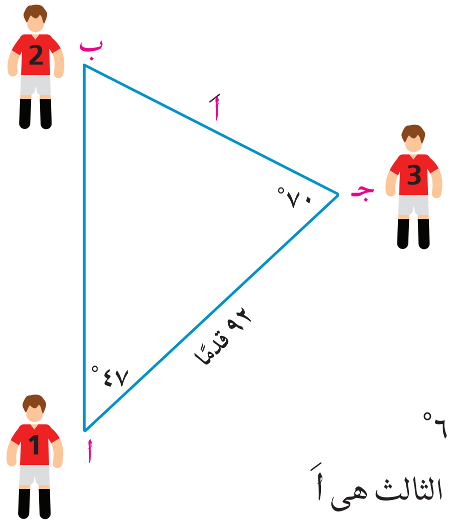
تطبيقات حياتية على قاعدة الجيب

Life Applications on the Sine Rule

يُمكن استخدام قاعدة الجيب في حل الكثير من التطبيقات وذلك برسم مثلث ثم حل هذا المثلث لإيجاد المطلوب.

مثال

⑥ **الربط بالرياضة:** يُمثِّل الشكل المقابل ثلاثة لاعبين من فريق كرة القدم خلال إحدى المباريات. أوجد المسافة بين اللاعب الثانى واللاعب الثالث لأقرب قدم.



الحل

ق(∠ب) = ١٨٠° - (٧٠° + ٤٧°) = ٦٣°

والمسافة بين اللاعب الثاني واللاعب الثالث هى أَ

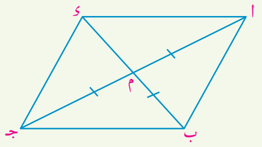
فيكون: $\frac{\text{أَ}}{\text{جا ٤٧°}} = \frac{\text{٩٢}}{\text{جا ٦٣°}}$ ∴ أَ = $\frac{\text{٩٢ × جا ٤٧°}}{\text{جا ٦٣°}}$ ≃ ٧٦ قدمًا

باستخدام الآلة الحاسبة

ابدأ ← 9 2 × sin 4 7) ÷ sin 6 3) =

المسافة بين اللاعب الثانى واللاعب الثالث هو تقريبًا ٧٦ قدمًا

إرشاد



مساحة سطح متوازى الاضلاع

أ ب جـ ء = ٢ مـ(△أ ب جـ)

ومساحة △ أ ب جـ =

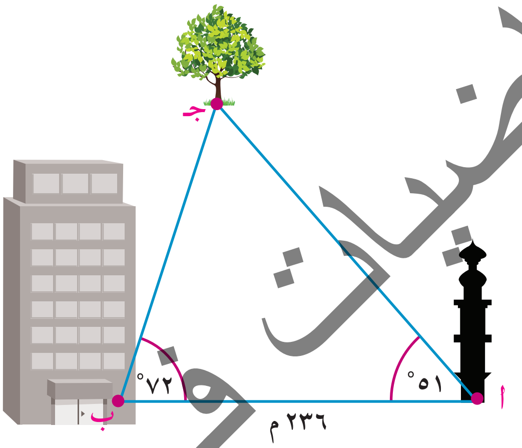
$\frac{1}{2}$ أ ب × أ جـ حا ب أ جـ

حاول أن تحل

⑥ أوجد المسافة بين اللاعب الأول واللاعب الثانى لأقرب قدم.

مثال

⑦ **الربط بالجغرافيا:** فى الشكل التالى ثلاثة مواقع جغرافية تُشكل مثلثًا، إذا كانت المسافة بين الموقع أ، والموقع ب، ٢٣٦مترًا، ، وكان قياس الزاوية عند الموقع ب يساوى ٧٢°، وقياس الزاوية عند الموقع أ تساوي ٥١° أوجد:



أ المسافة بين الموقع جـ والموقع ب مقربًا الناتج لأقرب عدد صحيح.

ب مساحة الأرض التى تمثل المواقع أ، ب، جـ رؤوسًا لها مقربًا الناتج لأقرب متر مربع.

الحل

أ نوجد ق(∠جـ) في △ أ ب جـ : ق(∠جـ) = ١٨٠° - (٥١° + ٧٢°) = ٥٧°

نستخدم قاعدة الجيب لإيجاد طول $\overline{\text{ب جـ}}$:

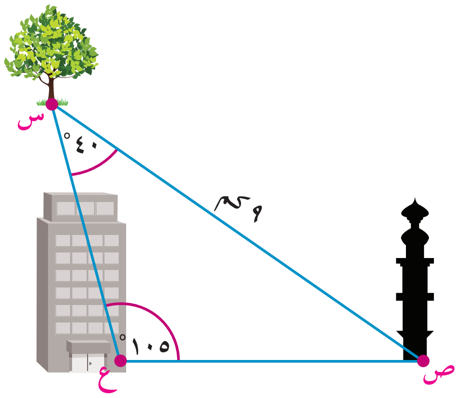
∵ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{جا جـ}}$ (قاعدة الجيب) ∴ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{جا ٥١°}} = \frac{\text{٢٣٦}}{\text{حا ٥٧°}}$ ومنها ب جـ = $\frac{\text{٢٣٦ × جا ٥١°}}{\text{جا ٥٧°}}$ = ٢١٨,٦٨٧١≃ ٢١٩ مترًا

ب نوجد مساحة سطح المثلث أ ب جـ بمعلومية أَ، جـَ، ق(∠ب)

∵ مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ أَ جـَ جا ب

= $\frac{1}{2}$ × ٢١٨,٦٨٧١ × ٢٣٦ × جا ٧٢° ≃ ٢٤٥٤٢ م^{٢}.

٩ حاول أن تحل


س
٤٠°
٩كم
١٠٥°
ع
ص

٧ فى الشكل المقابل ثلاثة مواقع جغرافية تشكل مثلثًا، إذا كانت المسافة بين الموقع س والموقع ص تُساوى ٩ كم ، وقياس الزاوية عند الموقع س تساوي ٤٠°، وقياس الزاوية عند الموقع ع تُساوى ١٠٥°، فأوجد:

أ المسافة بين الموقع س والموقع ع.

ب مساحة سطح المثلث الذى رؤوسة المواقع الثلاثة س، ص، ع.

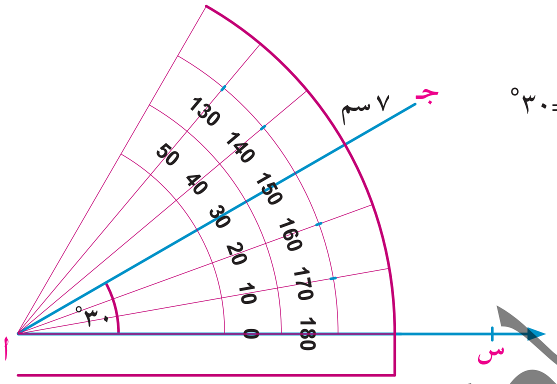
استخدام قاعدة الجيب لأي مثلث في إيجاد قياسات زوايا هذا المثلث (يوجد حلين لزاوية مجهولة).

نشاط ١

ارسم المثلث أ ب جـ الذي فيه بَ = ٧سم، أَ = ٥سم، ق(∠أ) = ٣٠°

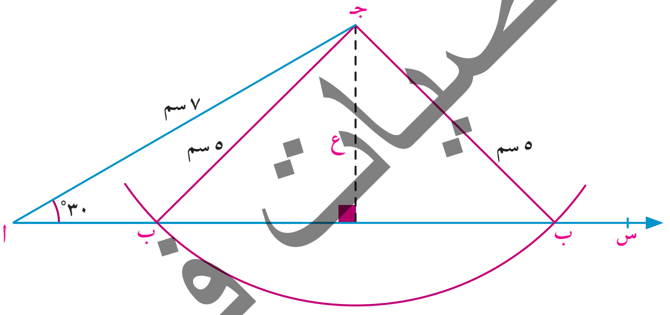
الأدوات المستخدمة:

ورق - قلم رصاص - مسطرة - فرجار - منقلة.


جـ
٧ سم
130
140
150
160
170
180
50
40
30
20
10
0
٣٠°
أ
س

أ من نقطة أ ارسم $\overleftarrow{\text{أ س}}$

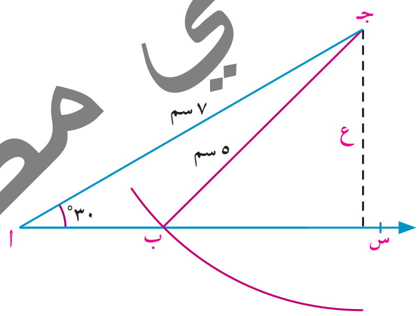
ب من نقطة أ استخدم المنقلة لرسم زاوية قياسها ٣٠° مع $\overleftarrow{\text{أ س}}$ ثم ارسم $\overline{\text{أ جـ}}$ التي طولها ٧ سم.

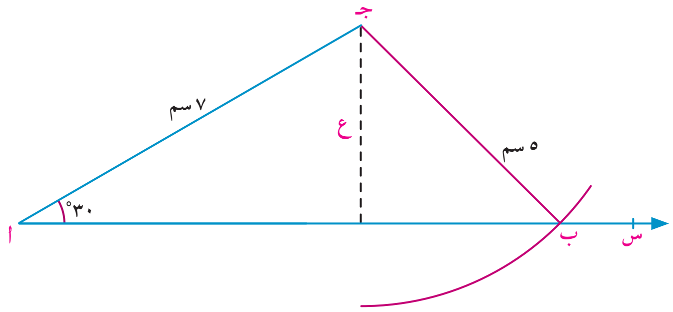

جـ
٧ سم
٥ سم
ع
٥ سم
٣٠°
أ
ب
ب
س

جـ ركز سن الفرجار عند النقطة جـ وبفتحة الفرجار بمقدار ٥ سم ارسم قوسًا يقطع $\overleftarrow{\text{أ س}}$ في نقطة ب ماذا تلاحظ؟

نلاحظ أن القوس يقطع $\overleftarrow{\text{أ س}}$ في نقطتين.

أي أن يوجد رسمان للمثلث أ ب جـ أحدهما حاد الزوايا والآخر منفرج الزاوية.


جـ
٧ سم
٥ سم
ع
٣٠°
أ
ب
س


جـ
٧ سم
ع
٥ سم
٣٠°
أ
ب
س

د قارن بين ارتفاع المثلث (ع) المرسوم من نقطة جـ ⊥ $\overleftarrow{\text{أ س}}$ وبين طول $\overline{\text{ب جـ}}$. ماذا تلاحظ؟

نلاحظ أن: ع = ٣,٥ سم ، ب جـ = ٥ سم ، أ جـ = ٧سم **أي أن:** ع < أَ < بَ

هـ هل يمكنك استخدام قاعدة الجيب في إيجاد قياسات زوايا المثلث السابق؟ فسر إجابتك.

نبحث إمكانية حل المثلث أ ب جـ كالآتي:

نوجد أقصر بعد مرسوم من جـ على $\overline{\text{أ ب}}$ وليكن ع. ع = بَ جا أ أي أن: ع = ٧ جا ٣٠ = $\frac{1}{2}$ ٣ سم

حيث أن ∠ ب حادة، ع < أَ < بَ فتوجد قيمتان للزاوية ب أحدهما الزاوية الحادة والأخرى هي الزاوية المكملة لها. نستخدم قاعدة الجيب كالآتي:

$$\frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} \quad \text{أي أن:} \quad \frac{٧}{\text{جا ب}} = \frac{٥}{\text{جا ٣٠}} \quad \text{ومنها تكون: جا ب} = \frac{٧ \times \text{جا } ٣٠^\circ}{٥} = ٠,٧$$

لذلك فإن ق(∠ب) ≃ ٣٧ً ٢٥َ ٤٤°

وتكون الزاوية الأخرى (منفرجة) ≃ ١٨٠° - ٣٧ً ٢٥َ ٤٤° ≃ ٢٣ً ٣٤َ ١٣٥°

تطبيق على النشاط

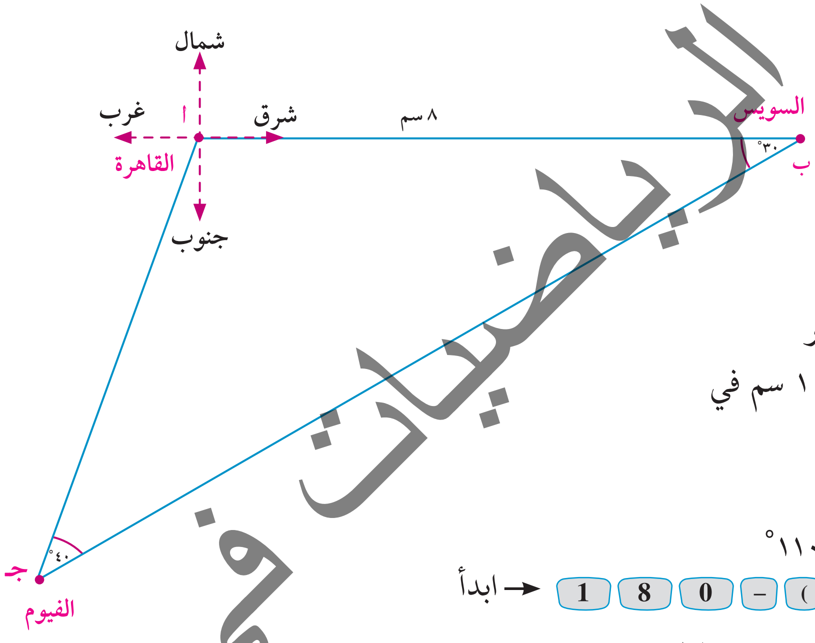
ل م ن مثلث فيه لَ = ١٢سم ، مَ = ١٥ سم، ق(∠ل) ٤٠°. اثبت أنه يوجد للزاوية م قيمتان ثم أوجدهما.

استخدام الآلة الحاسبة في حل تمارين وأنشطة على قاعدة الجيب.

نشاط ٢

الشكل المجاور يمثل ثلاثة مواقع لمدن مصرية تكون مثلثًا.

إذا كانت المسافة بين السويس والقاهرة ٨ سم وقياس الزاوية عند السويس ٣٠° وعند الفيوم ٤٠°. أوجد لأقرب كيلو متر المسافة بين القاهرة والفيوم إذا كان كل ١ سم في الرسم يمثل ١٦,٧٥ كم في الحقيقة.



أ هل يمكنك إيجاد ق(∠أ)؟

ق(∠أ) = ١٨٠° - (٣٠° + ٤٠°) = ١١٠°

ابدأ ← 1 8 0 − (3 0 + 4 0) =

ب كيف توجد المسافة الحقيقية بين السويس والقاهرة؟

الطول في الحقيقة = الطول في الرسم ÷ مقياس الرسم

$$\text{أب} = ٨ \div \frac{١}{١٦,٧٥} = ١٣٤ \text{ كم.}$$

ابدأ ← 8 ÷ (1 ÷ 1 6 . 7 5) =

جـ كيف توجد المسافة الحقيقية بين القاهرة والفيوم؟

نستخدم قاعدة الجيب كالآتي: $\frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جَـ}}{\text{جا جـ}}$

تَذكَّر أنَّ

$$\text{مقياس الرسم} = \frac{\text{الطول في الرسم}}{\text{الطول في الحقيقة}}$$

$$\text{الطول في الحقيقة} = \frac{\text{الطول في الرسم}}{\text{مقياس الرسم}}$$

الطول في الرسم =

الطول في الحقيقة × مقياس الرسم

أي أن: $\frac{\text{ب}َ}{\text{جا }30^\circ} = \frac{134}{\text{جا }40^\circ}$ ومنها ب َ = $\frac{134 \times \text{جا }30^\circ}{\text{جا }40^\circ} \simeq$ ١٠٤ كم.

ابدأ → $\boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{\times}\ \boxed{\sin}\ \boxed{3}\ \boxed{0}\ \boxed{)}\ \boxed{\div}\ \boxed{\sin}\ \boxed{4}\ \boxed{0}\ \boxed{)}\ \boxed{=}$

د هل يمكنك استخدام الطول الدقيق في الرسم لإيجاد المسافة بين القاهرة والفيوم؟

من الرسم الموجود بهذا النشاط نجد أن: أ جـ ≃ ٦,٢ سم

لذلك فإن الطول الحقيق بينهما ≃ ٦,٢ ÷ $\frac{1}{16{,}75} \simeq$ ١٠٤ كم.

تدريب على النشاط:

في النشاط السابق أوجد باستخدام قاعدة الجيب المسافة الحقيقية بين السويس والفيوم ثم تحقق من صحة الناتج باستخدام القياس.

تمـــارين (٤-١)

أكمل:

① فى أيِّ مثلث تَتناسب أطوال أضلاع المثلث مع ....

② أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع، طول ضلعه ١٠$\sqrt{3}$ سم ، فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوس هذا المثلث تُساوى ....

③ مثلث أ ب جـ فيه ق(∠أ) = ٦٠°، ق(∠جـ) = ٤٠°، جـَ = ٨,٤ سم فإن أَ = ... سم

④ فى المثلث أ ب جـ يكون $\frac{\text{٢ ب}َ}{\text{جا ب}}$ = ... نق

⑤ دائرة طول قطرها ٢٠سم، تمر برؤوس المثلث أ ب جـ الحاد الزوايا الذى فيه ب جـ = ١٠سم فإن ق(∠أ) = ...°

⑥ مساحة المثلث المتساوى الاضلاع الذى طول ضلعه ٦ سم يساوى ....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

⑦ طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ الذى فيه ق(∠أ) = ٣٠°، أَ = ١٠سم هو

أ ١٠سم　**ب** ٢٠سم　**ج** ٥سم　**د** ٤٠سم

⑧ إذا كان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ يساوى ٤سم، ق(∠أ) = ٣٠° فإن طول أَ هو

أ ٤سم　**ب** ٢سم　**ج** ٤$\sqrt{3}$　**د** $\frac{1}{16}$

⑨ فى المثلث أ ب جـ يكون المقدار ٢نق جاأ مساويًا

أ أَ　**ب** بَ　**ج** جـَ　**د** مـ(△أ ب جـ)

⑩ إذا كانت نق هى طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث س ص ع فإن $\frac{\text{ص}َ}{\text{جا ص}}$ يساوى

أ نق　**ب** ٢ نق　**ج** $\frac{1}{2}$نق　**د** ٤ نق

⑪ المثلث ل م ن فيه، ق(ل) = ٣٠°، م ن = ٧سم، فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسة تساوى:

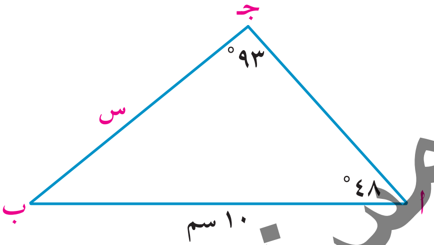
أ ٧سم　ب ٣,٥سم　ج ١٤سم　د $\frac{١٤}{\sqrt{٣}}$

⑫ فى المثلث س ص ع إذا كانت ٣ جا س = ٤ جا ص = ٢ جا ع فإن سَ : صَ : عَ تساوى

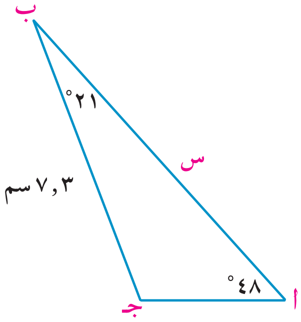
أ ٢ : ٣ : ٤　ب ٦ : ٤ : ٣　ج ٣ : ٤ : ٦　د ٤ : ٣ : ٦

⑬ باستخدام قانون الجيب أوجد س لأقرب جزء من عشرة.

أ



ب



حل كُلَّ مثلث أ ب جـ باستخدام قانون الجيب إذا عَلِمتَ أن:

⑭ ق(∠أ) = ٧٥°، ق(∠ب)= ٣٤°، أَ = ١٠,٢سم

⑮ ق(∠أ) = ١٩°، ق(∠جـ)= ١٠٥°، جـَ = ١١,١سم

⑯ ق(∠أ) = ١١٦°، ق(∠جـ)= ١٨°، أَ = ١٧سم

⑰ ق(∠أ) = ٣٦°، ق(∠ب)= ٧٧°، بَ = ٢,٥سم

⑱ ق(∠أ) = ١١َ ٤٩°، ق(∠ب)= ١٧َ ٦٧°، جـَ = ١١,٢٢سم

⑲ ق(∠ب) = ٤َ ١١٥°، ق(∠جـ)= ١٧َ ١١°، جـَ = ٥١٦,٢سم

أوجد طول قُطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ فى كُلِّ حالة مما يلى:

⑳ ق(∠أ) = ٧٥°، أَ = ٢١سم

㉑ ق(∠ب)= ٥٠°، بَ = ٩٠سم

㉒ ق(∠جـ)= ١٠٢°، جـَ = ١١سم

㉓ ق(∠أ)= ٧٠°، أَ = ٨,٥سم

نشاط (٢٤،٢٥،٢٦)

فى كُلِّ مثلث أ ب جـ، أوجد قياسات زاويتى ب، جـ التى تُحقق الشروط المعطاة، ارسم أشكالًا لتساعدك فى تقرير ما إذا كان هناك مثلثان ممكنين أم مثلث واحد.

㉔ ق(∠أ) = ٦٢°، أَ = ٣٠سم، بَ = ٣٢سم

㉕ ق(∠ب) = ٤٨°، أَ = ٩٣سم، بَ = ١٢٥سم

㉖ ق(∠أ) = ٢٣,٦°، أَ = ٩,٨سم، بَ = ١٧سم

㉗ فى المثلث أ ب جـ، ق(∠أ) = ٢٢َ ٦٧°، ق(∠جـ) = ٣٣َ ٤٤°، بَ = ١٠٠ سم، أوجد محيط المثلث أ ب جـ ومساحة سطحه.

㉘ في المثلث س ص ع إذا كان صَ = ٦٨,٤سم، ق(∠ص) = ١٠٠°، ق(∠ع) = ٤٠°، أوجد سَ وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث س ص ع، ثم أوجد مساحة سطح المثلث.

㉙ أ ب جـ مثلث فيه ق(∠أ) = ٣٧َ ٢٢°، ق(∠ب) = ٢٣َ ٦٧° ومحيطه ٣٠سم أوجد كل من أَ، بَ لأقرب سنتيمتر

٣٠ أ ب جـ مثلث محيطه ٤٥٠سم، ق(∠ب) = ٨٢°، ق(∠جـ) = ٥٦° ، أوجد قيمة أَ

٣١ أ ب جـ ى متوازى أضلاع فيه أ ب = ١٨,٦سم، ق(∠جـ أ ب) = ٣٦َ ٢٢° ، ق(∠ى ب أ) = ٣٨َ ٤٤° ، أوجد طول القطر أ جـ ومساحة سطح متوازى الأضلاع.

٣٢ أ ب جـ ى شبه منحرف فيه أ ى // ب جـ ، أ ى = ٢٢,٣سم، ق(∠ى) = ١١٥°، ق(∠أ جـ ب) = ١٥َ ٣٢°، ق(∠ب) = ٦٦°، احسب طول كل من أ جـ، جـ ب.

٣٣ أ ب جـ ى هـ مخمس منتظم طول ضلعه ١٨,٢٦سم، أوجد طول قطره أ جـ.

٣٤ أ ب ، أ جـ وتران فى دائرة طولاهما ٤٣,٥سم، ٥٢,١سم، مرسومان فى جهتين مختلفتين من القطر أ ى الذى طوله ١٠٠سم أوجد:

أ ق(∠ب أ جـ)

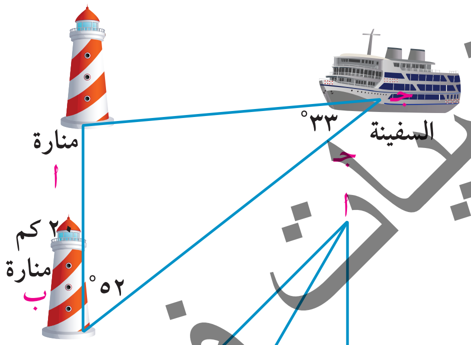
ب طول ب جـ

٣٥ أ ب جـ ى شكل رباعى فيه ق(∠ب جـ ى) = ٨٥°، ق(∠جـ ى أ) = ٨٧°، ق(∠ب جـ أ) = ٣٦°، ق(∠ب ى أ) = ٥٥°، جـ ى = ١٠٠سم ، أوجد طول كل من ب ى، أ جـ

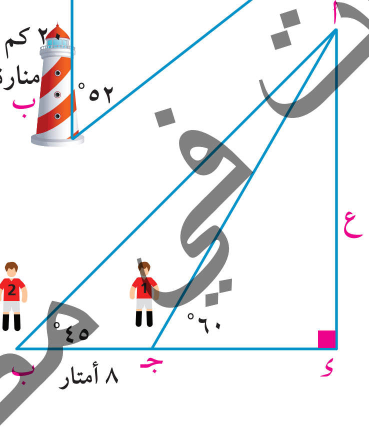
٣٦ أ ب جـ مثلث فيه أَ = ٥٨سم، ق(∠ب) = ٣٨°، ق(∠جـ) = ٦٢° ، أوجد طول العمود النازل من أ على ب جـ.

٣٧ قطعة أرض على شكل مثلث أ ب جـ فيه أَ = ٩٠ مترًا، ق(∠ب) = ٨َ ٥٣°، ق(∠أ) = ٩َ ٦٤°، أوجد محيط هذه القطعة ومساحتها.

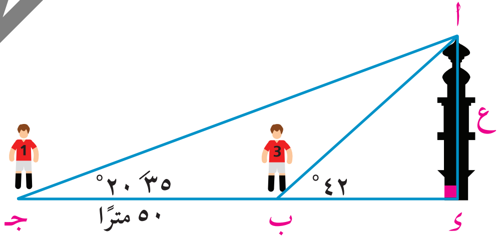
تفكير إبداعى:



٣٨ **الربط بالجغرافيا:** منارتان أ، ب المسافة بينهما ٢٠كم على خط واحد من الشمال إلى الجنوب، وكانت سفينة فى الموقع جـ، بحيث ق(∠أ جـ ب) = ٣٣° ، ق(∠أ ب جـ) = ٥٢°، فأوجد المسافة بين السفينة وكلٍّ من المنارتين.



٣٩ **الربط بالتسلق:** في الشكل المقابل :يقف عادل وكريم أمام جدار صخرى للتسلق عليه وكانت المسافة بينهما ٨ أمتار، كما هو مبين بالشكل المجاور. ما ارتفاع الجدار الصخرى مقربًا لأقرب جزء من عشرة.



٤٠ يقف أحمد وصلاح أمام مئذنة وكانت المسافة بينهما ٥٠مترًا، كما هو مبين بالشكل المجاور. ما ارتفاع المئذنة لأقرب جزء من عشرة من المتر.

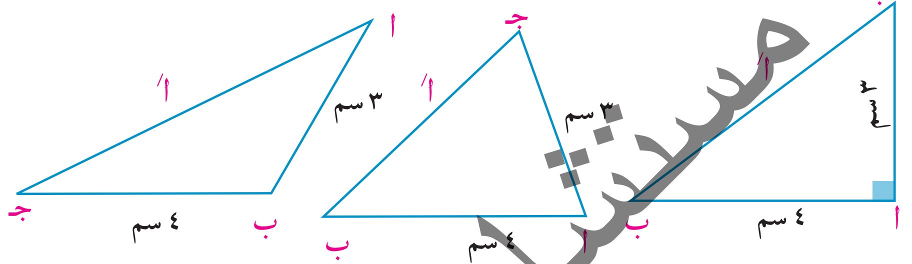
٤-٢

قانون (قاعدة) جيب التمام

The Cosine Rule

فكر و ناقش

كل من المثلثات التالية لها ضلعان طولهما ٣سم، ٤سم .



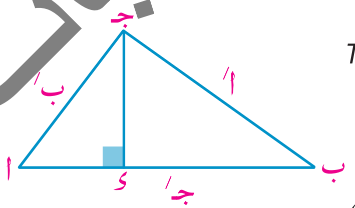
شكل (١) شكل (٢) شكل (٣)

- أ) من شكل (١) ∠ أ قائمه ، أوجد أَ.
- ب) ما القيم الممكنة لـ أَ في حالة ما تكون ∠ أ زاوية حادة (شكل ٢) ؟
- ج) ما القيم الممكنة لـ أَ فى حالة ماتكون ∠ أ زاوية منفرجة (شكل ٣) ؟
- د) هل يمكن حل المثلثين فى شكلى (٢) ، (٣) إذا علمت ق (∠ أ) باستخدام قانون الجيب ؟ فسرِّ إجابتك.

يُساعدنا قانون (قاعدة) جيب التمام فى حَلِّ مثل هذه المثلثات.

تعلم

قانون (قاعدة) جيب التمام *The Cosine Rule*



في الشكل المقابل: $\overline{\text{جـ ى}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

في △ ب جـ ى: $(\text{ب جـ})^{٢} = (\text{جـ ى})^{٢} + (\text{ب ى})^{٢}$

(من فيثاغورث)

$(\text{ب جـ})^{٢} = (\text{جـ ى})^{٢} + (\text{أب} - \text{أ ى})^{٢}$ وبفك الأقواس

$= (\text{جـ ى})^{٢} + (\text{أ ى})^{٢} + (\text{أ ب})^{٢} - ٢\text{أب}.\text{أ ى}$

$= (\text{أ جـ})^{٢} + (\text{أ ب})^{٢} - ٢\text{أب}.\text{أ ى}$

$\text{أَ}^{٢} = \text{بَ}^{٢} + \text{جـَ}^{٢} - ٢\ \text{بَ جـَ جتا أ}$

لاحظ أن

- $(\text{جـ ى})^{٢} + (\text{أ ى})^{٢} = (\text{أ جـ})^{٢}$
- أ ى = أ جـ جتا أ

فكر: أوجد قيمة كل من بَ^{٢} ، جـَ^{٢} بدلالة أَ ، بَ ، جـَ وقياسات زوايا △ أ ب جـ.

سوف تتعلم

- قانون (قاعدة) جيب التمام لأى مثلث.
- استخدام قانون (قاعدة) جيب التمام فى حل المثلث.
- نمذجة وحل مشكلات رياضية وحياتية باستخدام قاعدة جيب التمام.

المصطلحات الأساسية

قاعدة جيب التمام	*Cosine Rule*
زاوية حادة	*Acute Angle*
زاوية منفرجة	*Obtuse Angle*
زاوية قائمة	*Right Angle*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية

يَنص قانون (قاعدة) جيب التمام على أنه : فى أىِّ مثلث أ ب جـ يكون :

أَ^{٢} = بَ^{٢} + جـَ^{٢} - ٢ بَ جـَ جتا أ ، بَ^{٢} = جـَ^{٢} + أَ^{٢} - ٢ جـَ أَ جتا ب

، جـَ^{٢} = أَ^{٢} + بَ^{٢} - ٢ أَ بَ جتا جـ

تفكير ناقد

① اثبت قاعدة جيب التمام عندما يكون المثلث أ ب جـ منفرج الزاوية.

② هل قانون (قاعدة) جيب التمام صحيح فى حالة المثلث القائم الزاوية ؟ فسِّر إجابتك.

نشاط ٣

ابحث فى مكتبتك المدرسية أو باستخدام الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت)، عن براهين أخرى لقانون (قاعدة) جيب التمام ، ثم ناقش معلمك فيما توصَّلت إليه .

إيجاد طول ضلع مجهول فى مثلث.

مثال

① س ص ع مثلث فيه سَ = ٢٤,٣سم ، صَ = ٢٢,٨سم ، ق(∠ ع) = ٤٢° أوجد عَ مقربًا لرقم عشري واحد.

الحل

عَ^{٢} = سَ^{٢} + صَ^{٢} - ٢سَ صَ جتا ع

= (٢٤,٣)^{٢} + (٢٢,٨)^{٢} - ٢ × ٢٤,٣ × ٢٢,٨ جتا ٤٢° ≃ ٢٨٦,٨٧

ع ≃ ١٦,٩ سم

وذلك باستخدام الآلة الحاسبة كالآتى :

ابدأ → 2 4 . 3 x^2 + 2 2 . 8 x^2 − 2 × 2 4 . 3
× 2 2 . 8 cos 4 2 = √ ANS =

حاول أن تحل

① أ ب جـ مثلث فيه أَ = ٧٢,٨ سم ، بَ = ٥٨,٤سم ،ق(∠ جـ) = ٦٤,٨° أوجد جـَ مقربًا لرقم عشري واحد.

إيجاد قياس زاوية فى المثلث إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة

سبق أن علمت أن :

أَ^{٢} = بَ^{٢} + جـَ^{٢} - ٢ بَ جـَ جتا أ (قاعدة جيب التمام)

أي أن : ٢بَ جـَ جتا أ = بَ^{٢} + جـَ^{٢} - أَ^{٢}

فتكون: جتا أ = $\frac{\text{بَ}^{٢} + \text{جـَ}^{٢} - \text{أَ}^{٢}}{\text{٢بَ جـَ}}$ (بالقسمة على ٢بَ جـَ)

كما يمكن استنتاج أن:

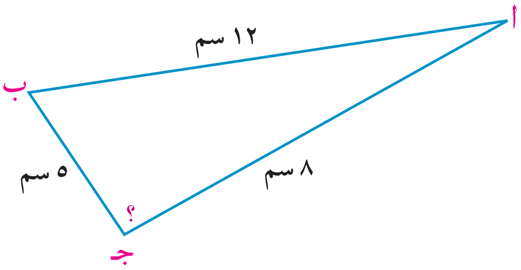
جتا ب = $\frac{\text{جـَ}^{٢} + \text{أَ}^{٢} - \text{بَ}^{٢}}{\text{٢جـَ أَ}}$ ، جتا جـ = $\frac{\text{أَ}^{٢} + \text{بَ}^{٢} - \text{جـَ}^{٢}}{\text{٢ أَ بَ}}$

مكتبة مستشار الرياضيات في مصر

استخدام قاعدة جيب التمام لأي مثلث في إيجاد قياس زاوية مجهولة في هذا المثلث.

مثال

② من الشكل المقابل، أوجد ق(∠ جـ)



الحل

$$\text{جتا جـ} = \frac{\text{أَ}^2 + \text{بَ}^2 - \text{جـَ}^2}{٢\ \text{أَ بَ}} \quad \text{(قاعدة جيب التمام)}$$

$$= \frac{(٥)^2 + (٨)^2 - (١٢)^2}{٢ \times ٥ \times ٨} \quad \text{(بالتعويض)}$$

$$= \frac{-٥٥}{٨٠}$$

وذلك باستخدام الآلة الحاسبة كالآتى

ابدأ → 5 χ^2 + 8 χ^2 − 12 χ^2 ÷ (2 × 5 × 8) =

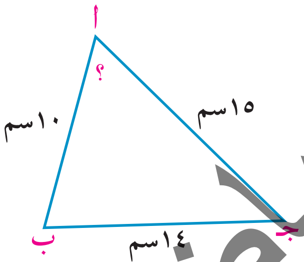
SHIFT cos = ...

ونلاحظ أن جيب تمام الزاوية سالب وبالتالى ∠ جـ منفرجة فيكون

ق(∠ جـ) ≃ ١٣٣° ٢٥َ ٥٧ً

؟ حاول أن تحل

② من الشكل المقابل أوجد ق(∠ أ)



مثال

③ أوجد قياس أكبر زاوية فى المثلث ل م ن ، إذا عُلِمَ أنَّ لَ = ٧,٥ سم ، مَ = ١٢,٥ سم، نَ = ١٧,٥ سم، ومن ذلك أثبت أنه فى هذا المثلث يكون :

جتا ن - ٣ $\sqrt{٣}$ جا ن + ٥ = ٠

الحل

أكبر زاوية هى المقابلة لأكبر ضلع ؛ لذلك تكون ∠ ن هى أكبر زاوية فى المثلث

$$\text{ويكون : جتا ن} = \frac{\text{لَ}^2 + \text{مَ}^2 - \text{نَ}^2}{٢\ \text{لَ مَ}} = \frac{(٧,٥)^2 + (١٢,٥)^2 - (١٧,٥)^2}{٢ \times ٧,٥ \times ١٢,٥} = -\frac{١}{٢}$$

∴ جتا ن = $-\frac{١}{٢}$ ∴ ق(∠ ن) = ١٢٠°

تذكر أن

جتا ١٢٠° = جتا (١٨٠° – ٦٠°)

= – جتا ٦٠° = – $\frac{١}{٢}$

جا ١٢٠ = جا (١٨٠° – ٦٠°)

= جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ابدأ → 7 · 5 χ^2 + 1 2 · 5 χ^2 − 1 7 · 5 χ^2 =

÷ (2 × 7 · 5 × 1 2 · 5) =

SHIFT cos ANS) = ...

الطرف الآيسر = جتا ن - ٣ $\sqrt{٣}$ جا ن + ٥ = جتا ١٢٠° - ٣ $\sqrt{٣}$ جا ١٢٠° + ٥

= $-\frac{١}{٢}$ - ٣ $\sqrt{٣}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٥ = صفر = الطرف الأيمن.

؟ حاول أن تحل

③ المثلث أ ب جـ إذا كان أَ = ١٢ سم ، بَ = ١٥سم ، جـَ = ١٨ سم ، أثبت أن ق(∠ جـ) = ٢ ق(∠ أ)

استخدام قانون (قاعدة) جيب التمام فى حل المثلث

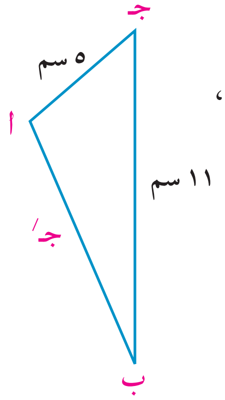
يسمح لنا قانون جيب التمام بحل المثلث بمعلومية طولى ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما وفى هذه الحالة يوجد مثلث وحيد.

حل المثلث بمعلومية طولى ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما

Solving the Triangle in the Terms of the Lengths of Two Sides and Measure of the Angle Included

مثال

④ حل المثلث أ ب جـ الذى فيه أَ = ١١سم ، بَ = ٥سم ، ق($\angle$جـ) = ٢٠°



الحل

∵ جـَ^{٢} = أَ^{٢} + بَ^{٢} - ٢أَبَ جتا جـ

∴ جـَ^{٢} = (١١)^{٢} + (٥)^{٢} - ٢ × ١١ × ٥ جتا ٢٠°

∴ جـَ = $\sqrt{\text{(١١)}^{٢}+\text{(٥)}^{٢} - ٢ \times ١١ \times ٥ \text{جتا } ٢٠}$

≃ ٦,٥٢٩سم

ابدأ ← √ 1 1 x^2 + 5 x^2 − 2 × 1 1 × 5 cos 2 0 =

حتا أ = $\frac{\text{بَ}^{٢} + \text{جـَ}^{٢} - \text{أَ}^{٢}}{\text{٢بَجـَ}}$

= $\frac{\text{(٥)}^{٢} + \text{(٦,٥٢٩)}^{٢} - \text{(١١)}^{٢}}{٢ \times ٥ \times ٦,٥٢٩}$ ≃ -٠,٨١٧

∴ ق($\angle$أ) ≃ ١٤٤,٧٨٦°

ق($\angle$ب) = ١٨٠° - [ق($\angle$أ) + ق($\angle$جـ)]

= ١٨٠° - [١٤٤,٧٨٦° + ٢٠°]

= ١٥,٢١٤°

∴ جـَ = ٦,٥٢٩سم ، ق($\angle$أ) = ١٤٤° ٤٧َ ٩٦ً

ق($\angle$ب) ≃ ١٥° ١٢َ ٥٠ً

حاول أن تحل

④ حل المثلث أ ب جـ الذى فيه أَ = ٢٤,٦سم ، جـَ = ١٤,٢سم ، ق($\angle$ب) = ٤٢° ١٨َ

تذكر أن

حل المثلث يعنى إيجاد عناصره المجهولة، وفى هذه الحالة يكون المطلوب هو إيجاد كل من حـَ ، ق($\angle$أ)، ق($\angle$ب)

معلومة مفيدة

عند إيجاد قياس زاوية فى مثلث بمعلومية طولى ضلعين وقياس الزاوية المحصورة، يفضل استخدام قانون جيب التمام بدلاً من استخدام قانون الجيب، وذلك لأن :

فى حالة استخدام قانون الجيب فإن جيب الزاوية الحادة أو المنفرجة دائمًا موجب، لأن الجيب موجب في الربعين الأول والثاني.

أما فى حالة استخدام قانون جيب التمام فإنه إذا كانت الزاوية منفرجة فإن جيب تمامها يكون سالبًا .

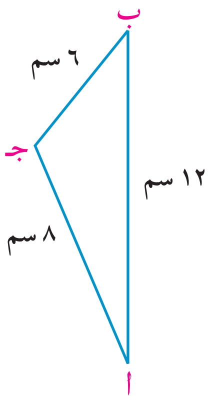
وإذا كانت الزاوية حادة فإن جيب تمامها يكون موجبًا

مكتبة مستشار الرياضيات في مصر

حل المثلث بمعلومية أطوال اضلاعه الثلاثة *Solving the Triangle knowing its Three Side Lengths*

مثال

⑤ حل المثلث أ ب جـ الذى فيه أَ = ٦سم ، بَ = ٨سم ، جـَ = ١٢سم



الحل

المطلوب إيجاد قياسات زوايا المثلث الثلاثة فيكون:

$$\text{جتا أ} = \frac{\text{بَ}^2 + \text{جـَ}^2 - \text{أَ}^2}{\text{٢ بَ جـَ}} = \frac{(٨)^2 + (١٢)^2 - (٦)^2}{٢ \times ٨ \times ١٢}$$

$$= \frac{٤٣}{٤٨}$$

$$\therefore \text{ ق}(\angle \text{أ}) \simeq ٢٦^\circ\ ٢٣'\ ٤''$$

ابدأ → 8 x^2 + 1 2 x^2 − 6 x^2 = ÷ (2 ×
8 × 1 2) = SHIFT cos ANS) =

$$\text{جتا ب} = \frac{\text{جـَ}^2 + \text{أَ}^2 - \text{بَ}^2}{\text{٢ جـَ أَ}} = \frac{(١٢)^2 + (٦)^2 - (٨)^2}{٢ \times ١٢ \times ٦} = \frac{٢٩}{٣٦}$$

$$\therefore \text{ ق}(\angle \text{ب}) \simeq ٣٦^\circ\ ٢٠'\ ١٠''$$

$$\therefore \text{ ق}(\angle \text{جـ}) = ١٨٠^\circ - [٢٦^\circ\ ٢٣'\ ٤'' + ٣٦^\circ\ ٢٠'\ ١٠'']$$

$$= ١١٧^\circ\ ١٦'\ ٤٦''$$

تذكر أن

حل المثلث يعنى إيجاد عناصره المجهولة، وفى هذه الحالة يكون المطلوب هو إيجاد كل من حـَ ، ق(∠أ)، ق(∠ب)

حاول أن تحل

⑤ حل المثلث أ ب جـ الذى فيه أَ = ١٢,٢ سم ، بَ = ١٨,٤سم ، جـَ = ٢١,١ سم

الكتابة فى الرياضيات

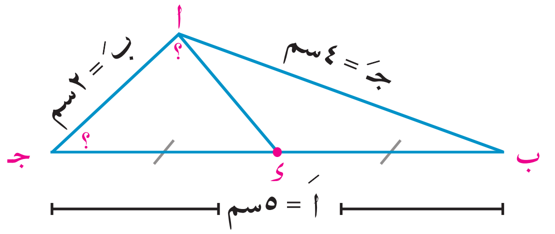
افرض أنك تعلَم قياسات الزوايا الثلاثة فى مثلث ما ، فهل يمكنك استخدام قانون جيب التمام أم قانون الجيب لإيجاد طول ضلع فى هذا المثلث ؟ فسِّر إجابتك.

تطبيقات هندسية على قانون (قاعدة) جيب التمام *Geometrical Applications on the Cosine Rule*

مثال

⑥ أ ب جـ مثلث فيه أَ = ٥سم ، بَ = ٢سم ، جـَ = ٤سم ، نصف $\overline{\text{ب جـ}}$ فى ء ثم صل $\overline{\text{أ ء}}$ ، أوجد : ق(∠جـ) ، ق(∠ جـ أ ء)

الحل



في المثلث أ ب جـ

$$\text{جتا جـ} = \frac{\text{أَ}^2 + \text{بَ}^2 - \text{جـَ}^2}{\text{٢ أَ بَ}}$$

$$= \frac{(٥)^2 + (٢)^2 - (٤)^2}{٢ \times ٥ \times ٢} = \frac{١٣}{٢٠}$$

∴ $\text{و}\ (\angle\ \text{جـ}) \simeq ٤٩^\circ\ ٢٧'\ ٣٠''$

ابدأ → 5 χ^2 + 2 χ^2 − 4 χ^2 = ÷ (2 × 5 × 2) =

SHIFT cos ANS =

فى المثلث أ ى جـ

$(\text{أ ى})^{٢} = (\text{ى جـ})^{٢} + (\text{أ جـ})^{٢} - ٢\ \text{ى جـ} \times \text{أ جـ جتا جـ}$

$= (\frac{٥}{٢})^{٢} + (٢)^{٢} - ٢ \times \frac{٥}{٢} \times ٢\ \text{جتا}\ ٤٩^\circ\ ٢٧'\ ٣٠''$

$\simeq ٣,٧٤٩٩$

∴ أ ى ≃ ١,٩٤ سم

∵ $\text{جتا}(\angle\ \text{جـ أ ى}) = \frac{(\text{أجـ})^{٢} + (\text{أى})^{٢} - (\text{جـى})^{٢}}{٢ \times \text{أجـ} \times \text{أى}}$

$= \frac{(٢)^{٢} + (١,٩٤)^{٢} - (٢,٥)^{٢}}{٢ \times ٢ \times ١,٩٤} \simeq ٠,١٩٥١$

∴ $\text{و}(\angle\ \text{جـ أ ى}) \simeq ٧٨^\circ\ ١٤'\ ١٤''$

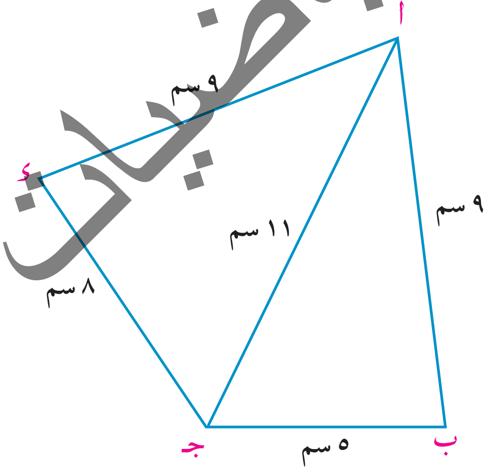
ابدأ → 2 χ^2 + 1 . 9 4 χ^2 − 2 . 5 χ^2 =

(2 × 2 × 1 . 9 4) = SHIFT cos ANS =

مثال

٧ **الربط بالهندسة :** أ ب جـ ى شكل رباعى فيه أ ب = ٩سم ، ب جـ = ٥سم ، جـ ى = ٨ سم، ى أ = ٩سم، أ جـ = ١١سم، أثبت أن الشكل أ ب جـ ى رباعى دائرى.

الحل



في المثلث أ ب جـ

$\text{جتا ب} = \frac{(٩)^{٢} + (٥)^{٢} - (١١)^{٢}}{٢ \times ٩ \times ٥} = -\frac{١}{٦}$

فى المثلث أ ى جـ

$\text{جتا ى} = \frac{(٩)^{٢} + (٨)^{٢} - (١١)^{٢}}{٢ \times ٩ \times ٨} = \frac{١}{٦}$

أىْ أنَّ جتا ى = - جتا ب

ويكون $\text{و}(\angle\ \text{ى}) + \text{و}(\angle\ \text{ب}) = ١٨٠^\circ$

وحيث أن ∠ ى ، ∠ ب زاويتان متقابلتان ومتكاملتان فى الشكل أ ب جـ ى

∴ الشكل أ ب جـ ى رباعى دائرى. **(وهو المطلوب)**

تذكر أن

الشكل الرباعى الدائرى هو شكل تنتمى رؤوسه الأربعة إلى دائرة واحدة.

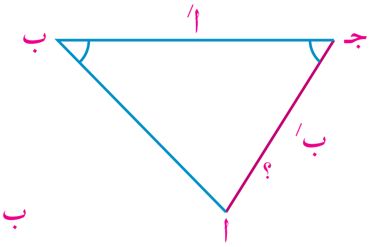
ويكون الشكل رباعى دائرى اذا كان:

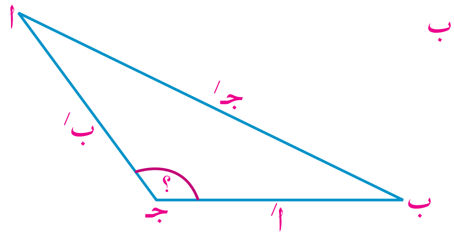
- زاويتان متقابلتان متكاملتان.
- قياس الزاوية الخارجة عند أى رأس من رؤوسه تساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها.
- فيه زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها ومتساويتان فى القياس.
- إذا كانت رؤوسه على بعد ثابت من نقطة ثابتة.

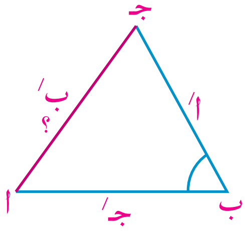
٩ حاول أن تحل

٦ أ ب جـ ى شكل رباعى فيه أ ب = ٢,٧سم ، أ جـ = ٧,٢ سم، ب جـ = ٦,٣سم، جـ ى = ٤,٥سم ، ب ى = ٧,٢سم.
أثبت أنَّ الشكل أ ب جـ ى رباعى دائرى.

مناقشة: لكل من المثلثات التالية ، اكتب الصيغةَ الصحيحةَ لقانون الجيب أو قانون جيب التمام لإيجاد ما هو مطلوب (يشار إليه باللون الأحمر)، استخدم فقط المعلومات المعطاة والمشار إليها باللون الأزرق.



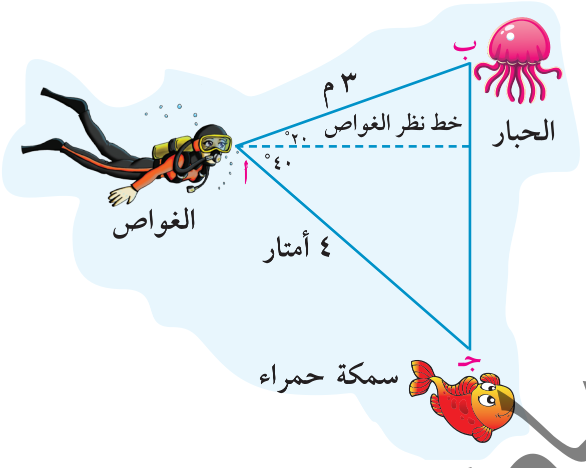




تَطبيقات حياتية على قانون جيب التمام

Life Applications on the Cosine Rule

مثال



٨ **الربط بالرياضة والسياحة:** في الشكل المقابل يهوى أحد السائحين رياضة الغطس فى مياه البحر الأحمر ليشاهد الأعشاب المرجانية النادرة والأسماك الملونة الرائعة، وفى إحدى مرات الغوص نَظر الغواص لأعلى بزاوية قياسها ٢٠° فرأى حبارًا يَبعد عنه مسافة ٣ أمتار، وعندما نظر لأسفل بزاوية قياسها ٤٠ °رأى سمكة حمراء تَبعد عنه مسافة ٤ أمتار ، فما المسافة بين الحبار والسمكة الحمراء؟

الحل

واضح من الرسم أننا نَعلم طولى ضلعين فى المثلث وقياس الزاوية المحصورة بينهما؛ لذا يمكننا استخدام قانون جيب التمام، وذلك كالآتى:

$$\text{أَ}^{٢} = \text{بَ}^{٢} + \text{جـَ}^{٢} - ٢\,\text{بَ}\,\text{جـَ}\ \text{حتا أ}$$

$$= (٤)^{٢} + (٣)^{٢} - ٢ \times ٤ \times ٣\ \text{حتا}\ ٦٠^\circ$$

$$= ١٣$$

$$\therefore\ \text{أَ} \simeq ٣,٦\ \text{أمتار}$$

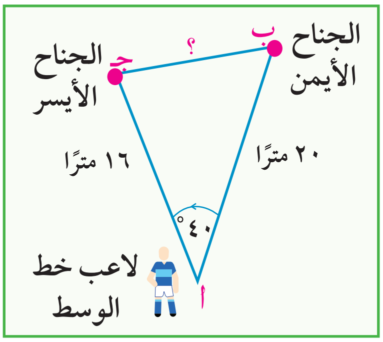
أىْ أنَّ المسافة بين الحبار والسمكة الحمراءُ يساوى ٣,٦ أمتار تقريبًا.

٩ حاول أن تحل

٧ **الربط بالرياضة:** يهوى هانى ركوب الدراجات ، فإذا سار مسافة ٦ كم من نقطة أ إلى نقطة ب ثم سار مسافة ٧ كم من نقطة ب إلى نقطة جـ بحيث ق(∠ أ ب جـ) = ٧٩° ما المسافة بين النقطتين أ ، جـ لأقرب كم؟

مثال

⑨ **الربط بالرياضة:** فى إحدى مباريات كرة القدم كان لاعب خط الوسط علي بعد ٢٠ مترًا من لاعب الجناح الأيمن، ودار لاعب خط الوسط بزاوية قياسها ٤٠°، فرأى لاعب الجناح الأيسر على بعد ١٦ مترًا منه ، ما المسافة بين لاعبى الجناحين ؟ (مقربًا لأقرب رقمين عشريين)



الحل

ارسم شكلًا يُمثل المسألة وذلك كما هو موضَّح،

أَ^{٢} = بَ^{٢} + جـَ^{٢} - ٢بَ جـَ جتا أ

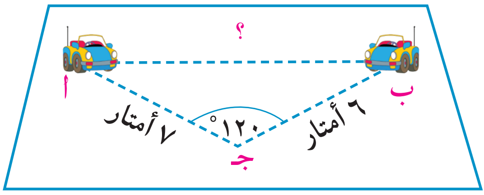
= (١٦)^{٢} + (٢٠)^{٢} - ٢ × ١٦ × ٢٠ جتا ٤٠°

≃ ١٢,٨٧ متر

المسافة بين الجناح الأيمن والجناح الأيسر هو حوالى ١٢,٨٧ مترًا.

حاول أن تحل

⑧ **العاب** فى ساحة السيارات المتصادمة فى مدينة الملاهى، كما هو مبين بالشكل المقابل ، ما المسافة بين السيارتين أ، ب قبل تصادمهما؟

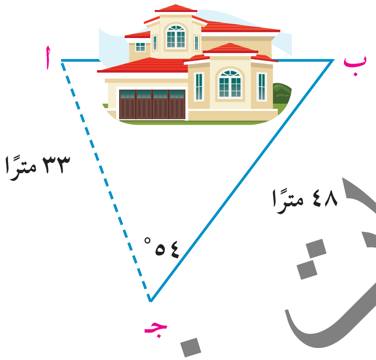


مثال

قياس المسافة بطريقة غير مباشرة

Measuring the Distance Indirectly

⑩ فى الشكل المقابل أراد شادى أن يقيس المسافة بين النقطتين أ ، ب فى جهتين مُختلفتين من مَبنى ، وذلك من الموقع جـ الذي يَبعد عن أ مسافة ٣٣ مترًا، وعن ب مسافة ٤٨ مترًا، كما هو موضَّح بالشكل المقابل ، إذا كان ق(∠ جـ) = ٥٤°، فأوجد المسافة أ ب (مقربًا لأقرب رقمين عشريين).



الحل

في المثلث أ ب جـ المسافة أ ب = جـَ

جـَ^{٢} = أَ^{٢} + بَ^{٢} - ٢ أَ بَ جتا جـ

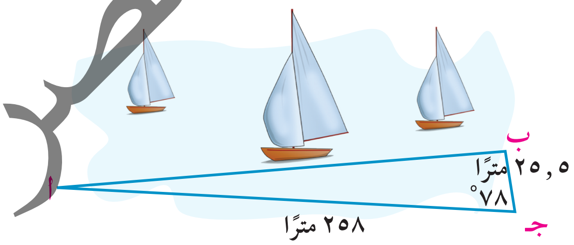
= (٤٨)^{٢} + (٣٣)^{٢} - ٢ × ٤٨ × ٣٣ جتا ٥٤°

≃ ١٥٣٠,٨٩٦٣

جـَ ≃ ٣٩,١٣ مترًا

حاول أن تحل

⑨ **حسابات مساحات الأراضى** ارادت سناء قياس المسافة من النقطة أ إلى النقطة ب، الواقعتان على شاطئ البحيرة ، فوقفت فى الموقع جـ ، الذى يَبعد عن النقطة أ مسافة ٢٥٨ مترًا ، وعن النقطة ب مسافة ٢٥,٥ مترًا ، وقاست ∠جـ فوجدتها ٧٨ °، أوجد طول $\overline{\text{أ ب}}$ (مقربًا لأقرب رقمين عشريين)



تمـــاريـن (٤-٢)

أكمل ما يأتى:

① فى أى مثلث س ص ع يكون :

سَ^{٢} = صَ^{٢} + عَ^{٢} ………………… ، جتا س = $\frac{صَ^{٢} + عَ^{٢} ……}{……}$

② مثلث أطوال أضلاعه ١٣، ١٧، ١٥ من السنتيمترات، فإن قياس أكبر زواياه هو…………………°

③ مثلث أطوال أضلاعه ٥,٧سم، ٧,٥سم، ٤,٢سم، فإن قياس أصغر زواياه هو …………………°

④ مثلث أ ب جـ فيه أَ = ١٠سم ، بَ = ٦سم ، ق(∠جـ) = ٦٠° فإن جـَ = …………………

⑤ فى المثلث ل م ن يكون مَ^{٢} + نَ^{٢} - لَ^{٢} = …………………

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

⑥ قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣، ٥، ٧ هى :

أ ١٥٠° ب ١٢٠° جـ ٦٠° د ٣٠°

⑦ فى أى مثلث ل م ن يكون المقدار $\frac{لَ^{٢} + مَ^{٢} - نَ^{٢}}{٢ لَ مَ}$ مساويًا :

أ جا ل ب جتا م جـ جتا ن د جا ن

⑧ فى المثلث س ص ع يكون صَ^{٢} + عَ^{٢} - سَ^{٢} = ٢صَ عَ…

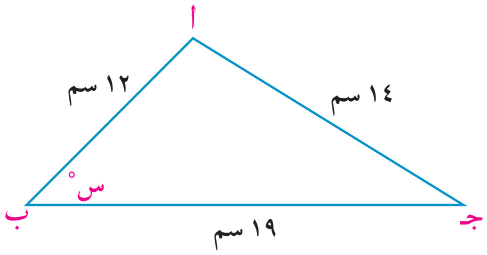
أ جتا س ب جا ع جـ جتا ع د جا س

⑨ فى المثلث ا ب جـ ، إذا كان أَ : بَ : جـَ = ٣ : ٢ : ٢ فإن حتا ا تساوى :

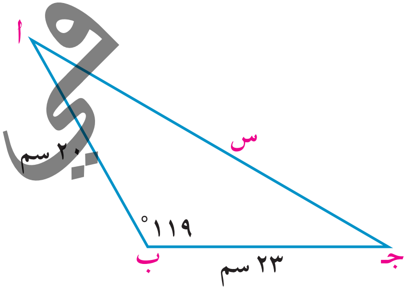
أ $\frac{١}{٢}$ ب $-\frac{١}{٨}$ جـ $\frac{١}{٢}$ د $\frac{٣}{٤}$

استخدم قانون جيب التمام لإيجاد قيمة س لأقرب جزء من عشرة

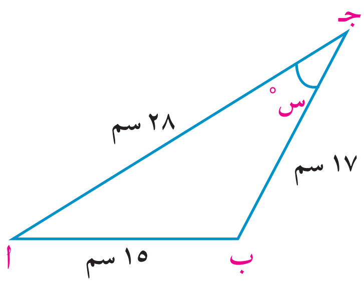
⑩


ا
١٢ سم
١٤ سم
س°
ب
جـ
١٩ سم

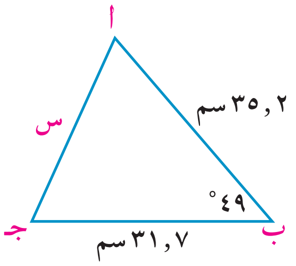
⑪


ا
س
٢٠ سم
١١٩°
ب
جـ
٢٣ سم

⑫


جـ
س°
٢٨ سم
١٧ سم
ا
ب
١٥ سم

⑬


ا
س
٣٥,٢ سم
٤٩°
جـ
ب
٣١,٧ سم

فى المثلث أ ب جـ إذا كان:

⑭ أَ = ٥، بَ = ٧ ، جـَ = ٨ ، فأثبت أن ق(∠ب) = ٦٠°

⑮ أَ = ٣، بَ = ٥ ، جـَ = ٧ ، فأثبت أن ق(∠جـ) = ١٢٠°

⑯ أَ = ١٣، بَ = ٧ ، جـَ = ١٣ ، فأوجد ق(∠جـ)

⑰ أَ = ١٣، بَ = ٨ ، جـَ = ٧ ، فأوجد ق(∠أ)

⑱ أَ = ١٠، بَ = ١٧ ، جـَ = ٢١ ، فأوجد قياس أصغر زاوية فى المثلث .

⑲ أَ = ٥، بَ = ٦ ، جـَ = ٧ ، فأوجد قياس أكبر زاوية فى المثلث.

⑳ أَ = ١٧سم، بَ = ١١سم ، ق(∠جـ) = ٤٢° ، فأوجد جـَ مقربًا لأقرب رقمين عشريين.

㉑ بَ = ١٦سم، جـَ = ١٤سم ، ق(∠أ) = ٧٢° ، فأوجد أَ مقربًا لأقرب رقمين عشريين.

㉒ مثلث أ ب جـ فيه أَ = ٣سم ، بَ = ٥سم ، جـَ = √١٩ سم أوجد :

أ ق(∠جـ) ب مساحة المثلث أ ب جـ

㉓ أ ب جـ مثلث فيه أَ = ٩سم ، بَ = ١٥سم ، جـَ = ٢١ سم ، أوجد قياس أكبر زاوية فى هذا المثلث ، وأثبت أنها تُحقق العلاقة جتا جـ - ٥√٣ جا جـ + ٨ = ٠

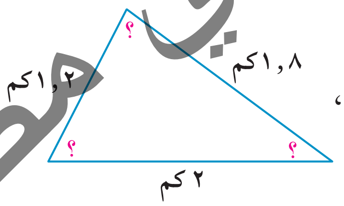
㉔ أ ب جـ ى شكل رباعى فيه أ ب = ٣سم ، أ جـ = ٨سم ، ب جـ = ٧سم ، جـ ى = ٥سم ، ب ى = ٨سم ، أثبت أن الشكل رباعى دائرى.

㉕ أ ب جـ ى شكل رباعى فيه أ ب = ١٥سم ، ب جـ = ٢٠سم ، جـ ى = ١٦سم، أ جـ = ٢٥ سم ، ق(∠أ جـ ى)= ٣٦ َ٥٢ َ٣٦° ، أوجد طول أى لأقرب سنتيمتر ، ثم أوجد مساحة سطح الشكل الرباعى أ ب جـ ى.

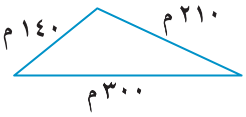
㉖ أ ب جـ ى متوازى أضلاع فيه أ ب = ١٢سم ، ب جـ = ١٠سم ، طول القطر بى يساوى ١٤سم ، أوجد طول القطر أجـ لأقرب سنتيمتر.

㉗ أ ب جـ ى شكل رباعى فيه ب جـ = ٧٨ سم ، جـ ى = ٩٦سم ، ق(∠ ب جـ ى) = ٩٧°، ق(∠ أ ب ى) = ٧٢°، ق(∠ أ ى ب) = ٤٣° أوجد طول أب .

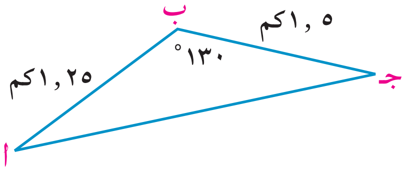
㉘ أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ١٦سم ، أ جـ = ٢٤ سم ، ق(∠ أ) = ٨٠° ، أوجد طول ب جـ ، وإذا كان أى ينصف ∠ أ من الداخل ويقطع ب جـ فى ى ، أوجد طول أى



㉙ **الربط بالرياضة :** ميدان للسباق على شكل مثلث أطوال اضلاعه ١,٢ كم، ٢كم، ١,٨كم، أوجد قياس كل زاوية من زواياه.



㉚ **مساحات الأراضى :** قطعة أرض على شكل مثلث أطوال أضلاعه ٣٠٠م ، ٢١٠م ، ١٤٠ م ، استخدم قانون جيب التمام لإيجاد مساحة قطعة الأرض مُقربًا لأقرب مترٍ مربعٍ.



٣١ **الربط بالرياضة :** يركب كريم دراجته ليقطع المسافة من النقطة أ إلى النقطة ب ثم إلى النقطة جـ بسرعة ٢٨ كم/ساعة، ثم يعود من النقطة جـ إلى النقطة أ مباشرة بسرعة ٣٥ كم/ساعة، كم دقيقة تستغرقها رحلة كريم ذهابًا وإيابًا ، قرب لأقرب جزء من عشرة.

٣٢ **الكتابة فى الرياضيات:** قارن بين الحالات التى تستطيع فيها استخدام قانون الجيب لحلِّ مثلث بتلك التى تستطيع فيها استخدام قانون جيب التمام.

٣٣ **اكتشف الخطأ:** أ ب جـ مثلث فيه أَ = ٥ سم، بَ = ١٠ سم، جـَ = ٧ سم ، ق(∠أ) = ٢٧,٦٦°
أوجد ق(∠ب):

حل زياد

$\because \dfrac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \dfrac{\text{أَ}}{\text{جا أ}}$

$\therefore \dfrac{١٠}{\text{جا ب}} = \dfrac{٧}{\text{جا } ٢٧,٦٦°}$

$\therefore \text{جا ب} = \dfrac{١٠ \text{ جا } ٢٧,٦٦°}{٥} \simeq ٠,٩٤٨٨$

$\therefore \text{ق}(\angle \text{ب}) \simeq ٦٨,١٩°$

حل كريم

$\because \text{جتا ب} = \dfrac{\text{جـَ}^٢ + \text{أَ}^٢ - \text{بَ}^٢}{٢\text{جـَ أَ}}$

$\therefore \text{جتا ب} = \dfrac{(٧)^٢ + (٥)^٢ - (١٠)^٢}{٢ \times ٧ \times ٥} \simeq -٠,٣٧١٤$

$\therefore \text{ق}(\angle \text{ب}) \simeq ١١١,٨°$

تفكير إبداعى :

٣٤ ضلعان من أضلاع مثلث طولاهما $(\sqrt{١٠} + ٢)$ ، $(\sqrt{١٠} - ٢)$ والزاوية المحصورة بينهما ٦٠° أوجد طول الضلع الثالث .

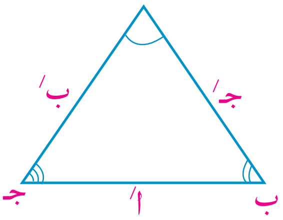
٣٥ أ ب جـ مثلث فيه ع - أَ = ٨سم ، ع - بَ = ٦سم ، ع - جـَ = ٤سم فأوجد قياس أكبر زاوية فى المثلث، حيث ٢ ع = أَ + بَ + جـَ

٣٦ فى المثلث أ ب جـ إذا كان ع -أَ = ٢٦سم ، بَ = ٢٨سم ، ع + أَ = ٩٨ سم، حيث ٢ ح هو محيط المثلث، فأوجد أطوال أضلاع المثلث ، ثم قياس أصغر زاوية فى هذا المثلث.

٣٧ إذا كانت النسبة بين جيوب زوايا مثلث هى ٤ : ٥ : ٦ أوجد النسبة بين جيوب تمام زوايا هذا المثلث .

٣٨ فى المثلث س ص ع إذا كان $\text{صَ}^٢ = (\text{عَ} - \text{سَ})^٢ + \text{عَ سَ}$ أثبت أن ق(∠ص) = ٦٠°

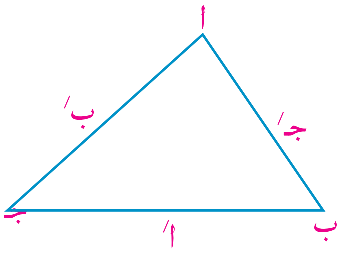
مُلخَّصُ الوَحْدَةِ



١ للمثلث ستة عناصر هى ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا .

٢ حل المثلث يعنى إيجاد عناصره المجهولة بدلالة عناصره المعلومة، وقد استخدمنا فى هذه الوحدة قانونى الجيب وجيب التمام مع استخدام الآلة الحاسبة العلمية لحل المثلث وحل تطبيقات هندسية وحياتية.

٣ **قانون (قاعدة) الجيب**: في أى مثلث ، تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها، أىْ أنَّه فى أى مثلث اب جـ يكون : $\frac{\text{اَ}}{\text{جا ا}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}}$



- وقد أمكن استخدام هذا القانون فى حل المثلث متى عُلِمَ قياسا زاويتين وطول ضلع فيه:

٤ فى أىِّ مثلث ا ب جـ يكون:

$$\frac{\text{اَ}}{\text{جا ا}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}} = \text{٢ نق}$$

- حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث ا ب جـ

٥ **قانون (قاعدة) جيب التمام:**

- يَنص قانون (قاعدة) جيب التمام على أنه: فى أى مثلث ا ب جـ يكون

$$\text{اَ}^{٢} = \text{بَ}^{٢} + \text{جـَ}^{٢} - \text{٢بَجـَ جتا ا} \qquad \text{ومنه} \qquad \text{جتا ا} = \frac{\text{بَ}^{٢} + \text{جـَ}^{٢} - \text{اَ}^{٢}}{\text{٢ بَ جـَ}}$$

$$\text{بَ}^{٢} = \text{جـَ}^{٢} + \text{اَ}^{٢} - \text{٢بَاَ جتا ب} \qquad \text{ومنه} \qquad \text{جتا ب} = \frac{\text{جـَ}^{٢} + \text{اَ}^{٢} - \text{بَ}^{٢}}{\text{٢ جـَ اَ}}$$

$$\text{جـَ}^{٢} = \text{اَ}^{٢} + \text{بَ}^{٢} - \text{٢اَبَ جتا جـ} \qquad \text{ومنه} \qquad \text{جتا جـ} = \frac{\text{اَ}^{٢} + \text{بَ}^{٢} - \text{جـَ}^{٢}}{\text{٢ اَبَ}}$$

٥ **استخدام قانون جيب التمام فى حل المثلث:**

- يمكن استخدام قاعدة جيب التمام فى حل المثلث إذا علم :
- طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.
- أطوال أضلاعه الثلاثة.

٦ **مساحة المثلث:** نصف حاصل ضرب ضلعين متجاورين في جيب الزاوية المحصورة بينهما

$\text{م} (\triangle \text{ا ب جـ}) = \frac{١}{٢} \text{اَ بَ جا جـ} = \frac{١}{٢} \text{بَ جـَ جا ا} = \frac{١}{٢} \text{جـَ اَ جا ب}$.

تمارين عامة

أكمل مايأتى:

① فى أى مثلث ، تتناسب أطوال أضلاعه مع ....

② يمكن استخدام قاعدة جيب التمام فى إيجاد قياسات زوايا المثلث إذا علمت .... أو ....

③ أكبر الأضلاع طولاً فى المثلث يقابل ....

④ يمكن استخدام قانون الجيب فى إيجاد طول أى ضلع فى المثلث إذا عُلِمَ منه ....

⑤ مثلث أ ب جـ معلوم به أَ ، ق(أ)، ق(ب) فإنه يمكن استخدام القاعدة .... لإيجاد بَ.

⑥ مثلث س ص ع معلوم به عَ ، صَ ، ق(∠س) فإنه يمكن استخدام القاعدة .... لإيجاد سَ.

⑦ مثلث ل م ن معلوم به لَ، مَ ، نَ ، فإنه يمكن استخدام قاعدة .... لإيجاد ق(∠ل)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

⑧ في المثلث س ص ع ، إذا كان سَ = ١٥سم، صَ = ٢٥ سم، عَ = ٣٥ سم فإن قياس أكبر زاوية في المثلث تساوى :

(أ) ١٥٠°   (ب) ١٢٠°   (ج) ٤٠°   (د) ٩٠°

⑨ فى المثلث أ ب جـ إذا كان أَ=٤سم ، بَ = ٧سم ، ق(∠جـ) = ١٢٠°، فإن مساحة سطح المثلث أ ب جـ تساوى:

(أ) ١٤سم٢   (ب) ٧√٣ سم٢   (ج) ٢٨سم٢   (د) ٧√٢ سم٢

⑩ س ص ع مثلث متساوى الأضلاع ، طول ضلعه ١٠√٣ سم ، فإن طول قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث يساوى :

(أ) ٥سم   (ب) ١٠سم   (ج) ١٥سم   (د) ٢٠سم

⑪ إذا كان طول نصف قُطر الدائرة المارة برؤوس المثلث س ص ع يُساوى ٥سم ، ق(س) = ٣٠°، فإن سَ يساوى :

(أ) ١٠ سم   (ب) ٥سم   (ج) ١٠سم   (د) ٢٠سم

⑫ فى المثلث أ ب جـ ، إذا كان أَ = ٥سم ، بَ = ٧سم ، جـَ = ٨سم، فإن ق(∠ب) تساوى :

(أ) ٣٠°   (ب) ٦٠°   (ج) ٤٥°   (د) ١٢٠°

⑬ فى المثلث أ ب جـ ، إذا كان أَ = ٣سم ، بَ = ٥سم ، جـَ = ٧سم، فإن قياس أكبر زاوية فى المثلث تساوى :

(أ) ٣٠°   (ب) ٦٠°   (ج) ٤٥°   (د) ١٢٠°

⑭ سؤال مفتوح: ارسم مثلثًا مختلف الأضلاغ، حدِّد ثلاثة من قياسات عناصره متضمنة طول أحد الأضلاع، ثم أوجد قياسات العناصر الثلاثة الأخرى.

⑮ (أ) فى المثلث أ ب جـ ، أَ = ٨سم ، بَ = ١٥سم، جـَ = ١٧سم أوجد ق(∠جـ)

(ب) فى المثلث أ ب جـ إذا كان أَ = ٨سم ، بَ = ١٥سم ، جـَ = ١٨سم ، هل ∠جـ حادة أم منفرجة ؟ فسِّر إجابتك.

⑯ أ ب جـ ء متوازى أضلاع فيه أ ب = ١٩,٧٧سم ، قطراه $\overline{\text{أ جـ}}$، $\overline{\text{ب ء}}$ يصنعان مع ضلعه $\overline{\text{أ ب}}$ زاويتين قياسهما ٣٦°، ٤٤° ، أوجد طولى القطرين.

⑰ أ ب جـ ء شكل رباعى فيه أ ب = ٢٧سم ، ب جـ = ١٢سم ، جـ ء = ٨سم ، ء أ = ١٢سم ، أجـ = ١٨ سم ، أثبت أن $\overline{\text{أ جـ}}$ ينصف ∠ ب أ ء.

⑱ أ ب جـ مثلث فيه ق(∠ أ) = ١٧َ ٥٢°، ق(∠ب) = ٦َ ٧٧°، ومحيط المثلث يساوى ٤, ٨٠سم، أوجد أطوال أضلاعه.

⑲ أ ب جـ مثلث فيه جـَ=٦, ٧سم، ، ق(∠أ) = ٨٠°، ق(∠ب) = ٤٧°، أوجد محيط هذا المثلث، وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه.

⑳ أ ب جـ ى متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م، أ جـ = ١٦سم، ب ى = ٢٠سم ق(∠ أ م ب) =٥٤° احسب طول أ ى لأقرب سنتيمتر.

㉑ أ ب جـ مثلث فيه ب جـ = ٢٠سم، ق(∠ب) = ٢٩°، ق(∠جـ) = ٧٣°، ى منتصف ب جـ، أوجد طول كل من أ ب ، أ ى مقربًا لأقرب رقمين عشريين.

㉒ أ ب جـ مثلث فيه أ جـ = ٧, ٤سم، ق(∠ب) = ٣٤°، ق(∠جـ) = ٦٦°، أوجد طول ب جـ، ثم أوجد محيط الدائرة التى تمر برؤوس المثلث أ ب جـ.

㉓ أ ب جـ مثلث فيه جتا أ = $\frac{٢}{٥}$، بَ = ٥, ٢سم، جـَ = ٢سم، أثبت أن المثلث أ ب جـ متساوى الساقين.

㉔ أ ب جـ مثلث فيه أَ : بَ : جـَ = ٤ : ٥ : ٦ أوجد جتا أ.

㉕ حل المثلث أ ب جـ الذى فيه بَ = ١١سم، ق(∠أ) = ٦٧°، ق(∠ب) = ٤٦° مقربًا الأطوال لأقرب سنتيمتر.

㉖ حل المثلث أ ب جـ الذى فيه أَ = ١٣سم، جـَ = ١٥سم، ق(∠أ) =٨َ ٥٣°

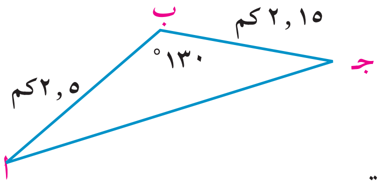
㉗ أ ب جـ ى متوازى الأضلاع محيطه ٣٠ سم والنسبة بين طولي ضلعيين متجاوريين ٣ : ٢، فإذا كان ق(∠ أ ى جـ) = ٦٠° فأوجد طول أ جـ.

㉘ أ ب جـ ى شبه منحرف فيه أ ى // ب جـ، أ ى = ٣, ٢٦سم، جـ ى = ٤, ٣٨سم، أ جـ = ٧, ٥١سم، ق(∠ ب أ ى) =١٥َ ١٠٣° أوجد طول ب جـ.

㉙ الربط بالرياضة: جرى أحمد مسافة ٨ كم فى اتجاه معين، ثم انعطف بزاوية قياسها ٨٠°، وجرى مسافة ٩ كم، ما المسافة بين النقطة التى بدأ منها أحمد الجرى والنقطة التى وصل إليها؟

㉚ الربط بالرياضة: فى إحدى مباريات كرة القدم كان لاعب خط الوسط على بعد ١٥مترًا من لاعب الجناح الأيمن، ودار لاعب خط الوسط بزاوية قياسها ٤٥°، رأى الجناح الأيسر على بعد ١٧ مترًا منه، ما المسافة بين لاعبى الجناحين؟

㉛ الربط بالمواصلات: يركب أحمد دراجته البخارية ليقطع المسافة من النقطة أ إلى النقطة ب ثم إلى النقطة جـ بسرعة ٥٠ كم/ ساعة ثم يعود من النقطة جـ إلى النقطة أ مباشرة بسرعة ٦٠ كم/ساعة، كم دقيقة تستغرقها الرحلة ذهابًا و إيابًا مقربًا لأقرب جزء من عشرة من الدقيقة؟



اختبار تراكمى

أسئلة الاختيار من مُتَعدِّد :

① بدون استخدام الآلة الحاسبة تكون قيمة جتا ١٢٠°

أ $-\frac{١}{٢}$ ب $\frac{١}{٢}$ ج $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

② أي من الزوايا الآتية يكون الجيب وجيب التمام لها سالبان؟

أ ٧٥° ب ١٣٥° ج ٢٦٥° د ٣٣٠°

③ إذا كان جا θ = ٤٦ فإن قياس الزاوية θ بالدرجات يساوي:

أ ٢٧,٣٩ ب -٠,٠٠٨ ج ٠,٠٠٨ د ٢٧,٣٩

④ العلاقة التى تربط بين ظا هـ، قا هـ تُعطى على الصورة :

أ ظا^{٢}هـ - ١ = قا^{٢}هـ ب قا^{٢}هـ -١ = ظا^{٢}هـ ج ظا^{٢}هـ - قا^{٢}هـ =١ د ظا^٢ هـ + ١ = قا^٢ هـ

⑤ نصف قُطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ الذى فيه ق(∠أ) = ٦٠° ، أَ = $\sqrt{٣}$ سم يكون طوله:

أ ٢سم ب $\sqrt{٣}$ سم ج ٢$\sqrt{٣}$ د $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ سم

⑥ فى أى مثلث ل م ن يكون المقدار : $\frac{مَ^٢ + نَ^٢ - لَ^٢}{٢ مَ نَ}$ مساويًا

أ جتا ل ب جتا م ج جا ل د جا ن

⑦ فى المثلث أ ب جـ يكون بَ مساويًا

أ $\frac{جـَ جا ب}{جا جـ}$ ب $\frac{جـَ جا جـ}{جا ب}$ ج $\frac{جـَ جا ب}{أَ}$ د $\frac{جـَ جا جـ}{أَ}$

⑧ فى المثلث أب جـ ، إذا كان أَ = ١٢، بَ =٢٨، جـَ = ٢٠ فإن ق(∠ب) تساوى :

أ ٣٠° ب ٦٠° ج ١٢٠° د ١٥٠°

أسئلة ذات إجابات قصيرة :

⑨ أوجد بدون استخدام الالة الحاسبة قيمة كل مما يأتي:

أ جتا ٢ π ب ظا ١٣٥° ج جا ٣٣٠° د قا $\frac{٧\pi}{٦}$

⑩ أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

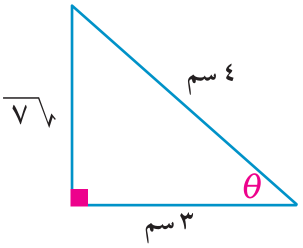
أ جا (-٣٠٠)° ب جا ٤٥° × جتا ٢١٠° ج جتا($\frac{٧\pi}{٦}$) د جا $\frac{٣\pi}{٢}$ جتا $\frac{٣\pi}{٢}$

⑪ فى المثلث س ص ع إذا كان سَ = ١٠سم ، ق(∠س) = ٣٠°، ق(∠ص) = ٤٥° ، فأوجد صَ .

⑫ أ ب جـ مثلث فيه أَ = ٤سم ، بَ = ٥سم ، جـَ = ٦سم ، أوجد قياس أكبر زاوية فى المثلث، ثم أوجد مساحته.

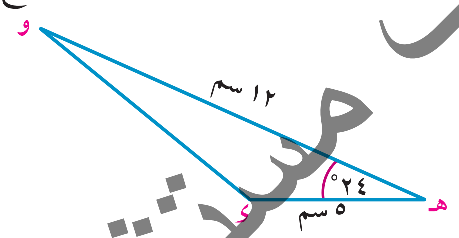
⑬ فى الشكل المقابل: استخدم الأطوال المعطاة في المثلث لتتحقق من أن:

أ جا^{٢} θ + جتا^{٢}θ = ١ ب ظا^{٢} θ + ١ = قا^{٢} θ

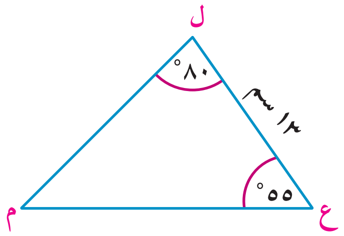


الأسئلة ذات الإجابات الطويلة :

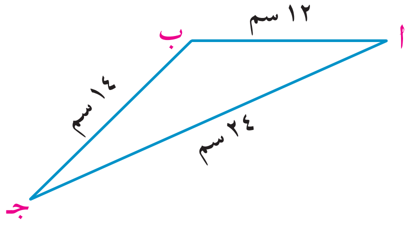
⑭ حل المثلث المقابل مقربًا طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة والزاوية إلى أقرب درجة



(أ)



(ب)



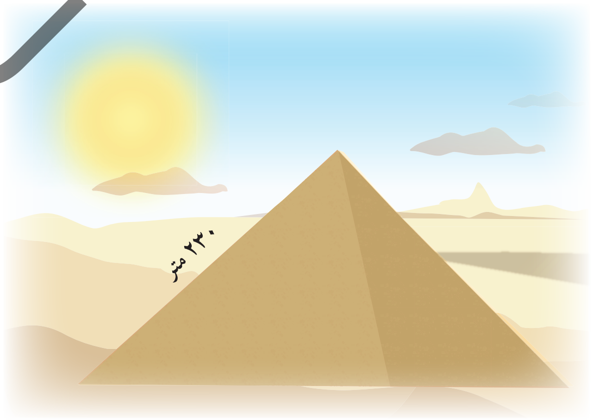
(جـ)

⑮ س ص ع مثلث فيه : ق(∠س) = $\frac{٢}{٣}$ ق(∠ص) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ع)، وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه ١٠سم، أوجد محيط المثلث س ص ع .

⑯ حل المثلث أ ب جـ الذى فيه، أَ = ١٢سم ، ق(∠جـ) = ٦٦°، جـَ = ٥سم مقربا الطول لأقرب سنتيمتر و الزاوية لأقرب درجة .

⑰ أ ب جـ ءشكل رباعى فيه أ ب = ٨سم ، أء = ١٠سم ، ق(∠أ) = ٨٢°، ب جـ = ١٢ سم ، ق(∠ جـ ب ء) = ٦٨° ، أوجد طول $\overline{\text{جـ ء}}$ لأقرب سنتيمتر.

⑱ الربط بالتاريخ: الهرم الأكبر (هرم خوفو) هوأكثر آثار العالم إثارة للجدل والخيال حيث يعد نقلة حضارية كبرى في تاريخ مصر القديم، وقد حاول المهندسون في ذلك الوقت بناء الواجهة على شكل مثلث متساوي الأضلاع إذ يقدر طول ضلعه بـ ٢٣٠ مترًا. أوجد لأقرب متر ارتفاع المثلث المتساوي الأضلاع لأقرب متر.



إن لم تستطع الإجابة علي احد هذه الأسئلة يمكنك الأستعانه بالجدول المرفق

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨
أرجع إلي	مهارات سابقة	مهارات سابقة	مهارات سابقة	مهارات سابقة	١١٣	١٢٢	١١٤	١٢٥	مهارات سابقة	مهارات سابقة	١١٢	١٢٣	مهارات سابقة	مهارات سابقة	١١٣	١١١	١١٢	١٢٦

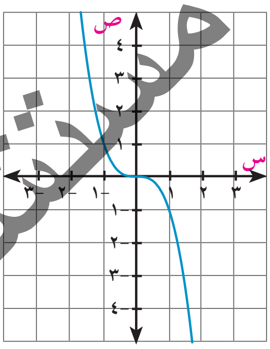
اختبارات عامة

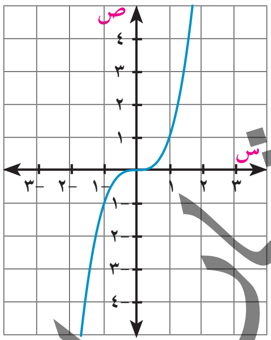
الاختبار الأول
الجبر

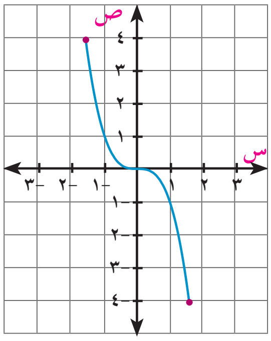
أجب عن الأسئلة الآتية:

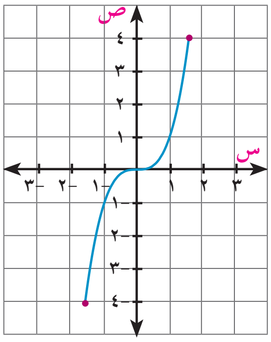
السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

① إذا كان د : ع $\longrightarrow$ ع حيث د(س) = $س^{٣}$ فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو:

أ


ب


ج


د


② إذا كان : $٥^{س - ٣} = ٤^{٣-س}$ فإن س =

أ $\frac{٥}{٤}$ ب ٣ ج $\frac{٤}{٥}$ د صفر

③ مدى الدالة د حيث د(س) = |س| هو

أ $[٠، \infty[$ ب $]٠، \infty[$ ج $[-\infty، ٠]$ د $]-\infty، ٠[$

④ إذا كان د(س) = $٥^{س}$ فإن د(-٢) =

أ -٢ ب ٥ ج $\frac{١}{٢٥}$ د $\frac{١}{٥}$

السؤال الثانى: .

① إذا كان الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$ فأوجد مجال الدالة د و إحداثيى نقطة التماثل لمنحنى هذه الدالة . ثم أوجد مجموعة حل المعادلة د$(\frac{١}{س})$ = ٤

② ارسم منحنى الدالة د حيث:

$$د(س) = \begin{cases} س^{٢} & \text{لكل } -٥ \leqslant س < ٢ \\ ٦ - س & \text{لكل } ٢ \leqslant س \leqslant ٨ \end{cases}$$

ومن الرسم عين مدى الدالة وابحث اطرادها.

السؤال الثالث:

① ارسم منحنى الدالة دحيث د(س) = |س - ٣| واستنتج من الرسم مدى الدالة واطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

② أوجد فى ع مجموعة الحل لكل من:

أ |س - ٣| ⩽ ٥ ب | س - ٣ | = صفر

السؤال الرابع :

① أوجد فى ع مجموعة حل المعادلة:

أ لو س = لو٣ + لو ١٠ ب $٩^{س} - ٣ \times ٣^{س}$ = صفر

② اختصر:

أ $\frac{٤^{٢ن+١} \times ٢^{١-ن}}{٨^{ن+٢}}$ ب $لو_{٦}$ ٥٤ - $لو_{٦}$ ٩

الاختبار الثاني الجبر

اجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

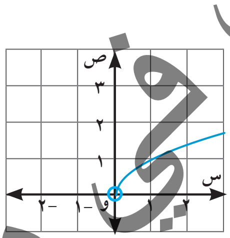
① مجموعة حل المتباينة |س| - ١ > صفر هو:

أ ع - [-١، ١] ب]-١، ١[ج ع -]-١ ، ١[د [-١، ١]

② إذا كان ٤ = $لو_{٢}$ س فإن الصورة الاسية المكافئة هى:

أ $س^{٢}$ = ٤ ب $س^{٤}$ = ٢ ج س = ١٦ د س = ٨

③ مجال الدالة فى الشكل المقابل هو:



أ [٠، ∞[ب]٠، ∞[

ج [٠، ١] د]٠، ٢[

④ أى الدوال الآتية تمثل دالة أسية تزايدية على مجالها ع:

أ ص = ٣ $(١,٠٥)^{س}$ ب ص = ٣ $(\frac{١}{١,٠٥})^{س}$ ج ص = ٣ + $(٠,٥)^{س}$ د ص = $(٠,٠٥)^{س}$

السؤال الثانى:

① إذا كانت د(س) = |س -٣| + |س +٢| فاثبت أن د(٢) = د(-١)

② استخدم منحنى الدالة د حيث $د(س) = س^{٢}$ فى رسم كل من الدوال الآتية :

أ $د_{١}(س) = س^{٢} - ٣$ ب $د_{٢}(س) = (س + ١)^{٢}$

السؤال الثالث:

① أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية فى ع:

أ $لو_{٢} س + لو_{٢} (س + ١) = ١$ ب $٣^{س} + ٣^{س + ١} = ٣٦$

② أ أوجد فى ع مجموعة حل المعادلة الآتية: $٤^{س} + ٢^{س + ١} = ٨$

ب بدون استخدام الحاسبة أثبت ان: $لو_{٦} ٨ + لو_{٦} ٢٧ = لو_{٣} ٢٧$

السؤال الرابع:

① أوجد فى ع مجموعة حل المتباينة $|س| + ١ < ٢$

② ارسم الشكل البيانى للدالة د حيث $د(س) = \frac{١}{س} - ١$

ومن الرسم أوجد مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

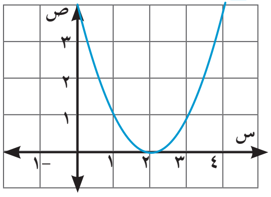
الاختبار الثالث — الجبر

اجب عن الاسئلة الآتية:

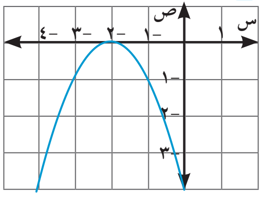
السؤال الأول: اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاه.

① إذا كانت (د) دالة حيث $د(س) = س^{٢} + ٢$ فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو

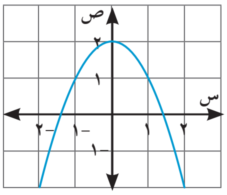
أ



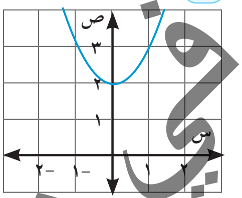
ب



ج



د



② مجموعة حل المعادلة $لو_{٣} |س| = ١$ هو

أ {٣} ب {-٣} ج {٣، -٣} د {١، -١}

③ إذا كان $٥^{س - ٢} = ١$ فإن س =

أ ٥ ب ٢ ج -٢ د ١

④ الدالة د حيث د(س) = $\frac{٢|س|}{س}$ تكافئ الدالة د(س) =

أ $\begin{cases} ٢ & \text{عندما } س > ٠ \\ -٢ & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$ ب ٢ ج -٢ د $\begin{cases} ٢ & \text{عندما } س \geq ٠ \\ -٢ & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$

السؤال الثانى:

① استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = $س^{٢}$ لتمثيل الدالة ر حيث ر (س) = د(س) + ٢ ومن الرسم أوجد مدى ر وأثبت أنها زوجية

② أوجد جبريًا مجموعة الحل لكل من :

أ $\sqrt{س^{٢} - ٦س + ٩} < ٥$ ب |س +٥| = |س - ٣|

السؤال الثالث:

① أ أوجد باستخدام الحاسبة قيمة س التى تحقق $٣^{س} = ٢٥$ مقربًا الناتج لرقمين عشريين

ب اختصر لأبسط صورة $\frac{١ - لو ٢}{لو ١٢٥}$

② **بدون استخدام الحاسبة أوجد فى أبسط صورة قيمة:** $\frac{١}{لو_{٢} ٣٠} + \frac{١}{لو_{٣} ٣٠} + \frac{١}{لو_{٥} ٣٠}$

السؤال الرابع:

① استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل الدالة ر حيث ر(س) = |س -١|-٢ ثم أوجد مدى الدالة ومعادلة محور التماثل .

② ابحث نوع كلاً من الدالتين الآتيتين من حيث كونها دالة زوجية أو فردية:

أ د(س) = س + حا س ب د(س) = $س^{٣} - ٢ س^{٢}$

الاختبار الرابع الجبر

اجب عن الاسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاه.

① مدى الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} ٠ & \text{عندما } س \geq ٠ \\ -١ & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$ هو

أ {٠} ب {-١} ج ع د {٠، -١}

② الدالة د حيث د(س) =$أ^{س}$ تكون تناقصية على مجالها ع عندما

أ) أ = ١
ب) أ > ١
ج) ٠ < أ < ١
د) أ = -١

③ نقطة رأس المنحنى للدالة د حيث د(س) = $س^{٢}$ +١

أ) (١ ، ٠)
ب) (-١ ، ٠)
ج) (٠ ، ١)
د) (٠ ، -١)

④ إذا كان د(س) = $٢^{س}$ فإن د (-١) =

أ) -١
ب) ١
ج) $\frac{١}{٢}$
د) - $\frac{١}{٢}$

السؤال الثانى:

① ارسم منحنى الدالتين د، ر حيث د(س) = س +١، ر(س) = ١ - س ومن الرسم أوجد مساحة المثلث المحدد بالمستقيمين المتقاطعين ومحور السينات .

② أوجد مجموعة الحل فى ع لكل من :

أ) |س - ١| = ٤
ب) ٢ |س - ٣| ⩽ ٥

السؤال الثالث:

① أوجد في أبسط صورة قيمة كلا من :

أ) $\frac{١٦^{س+\frac{١}{٤}} \times ٩^{س+٢}}{٨^{س-١} \times ١٨^{س+٢}}$
ب) $لو_{١٦}٧ \times لو_{٤٩}٢$

② عين مجال كل من الدوال الآتية :

أ) د(س) = $\frac{س}{س^{٢} - ٩}$
ب) ر(س) = $\sqrt{س + ٢}$

السؤال الرابع: د

① ارسم منحنى الدالة د حيث د(س) = $س^{٣}$ -١ ومن الرسم أوجد نقطة تماثل الدالة وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

② **أوجد في ع مجموعة الحل لكل من المعادلتين :**

أ) $٢^{س+١} = ٣^{س-٢}$
ب) $لو_{٣}س + لو_{٣}(س+٢) = ١$

الاختبار الخامس الجبر

اجب عن الاسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاه:

① لو ٢ + لو٥ =

أ ١ ب لو٧ ج لو ٢,٥ د ١٠

② نقطة تماثل منحنى الدالة د حيث د(س) = $س^{٣}$ هى:

أ (١، ١) ب (٠ ، ٠) ج (١، ٠) د (١ ، ٠)

③ مجال الدالة د(س) = لو$_{٣}$(س - ٢) هو س >

أ ٣ ب ٥ ج ١ د ٢

④ إذا كان د(س) = ٢ فإن د(٢س) =

أ ٢ ب ٤ ج صفر د ١

السؤال الثانى:

① **ارسم منحنى الدالة د حيث:**

$$د(س) = \begin{cases} س + ١ & -١ \leqslant س < ٢ \\ ٥ - س & ٢ \leqslant س \leqslant ٥ \end{cases}$$

ومن الرسم استنتج مدى هذه الدالة وابحث اطرادها وحدد نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

② **أوجد مجموعة الحل فى ع لكل مما يأتي :**

أ $|س - ١| = |س + ٢|$

ب $\sqrt{س^{٢} - ٢س + ١} \geqslant ٤$

السؤال الثالث:

① إذا كانت د(س) = $٢^{س+١}$ أوجد مجموعة حل كل من :

أ د(س) = ٣٢

ب د(س - ٢) = $\frac{١}{٨}$

② **أوجد قيمة س في كل مما يأتي:**

أ $٣^{س} \times ٤^{س} = \frac{٩}{١٦}$

ب س = لو$_{٢}$ ٩٨ + لو$_{٢}$ $\frac{١}{٧}$ - لو$_{٢}$ ٧

السؤال الرابع:

① ارسم الشكل البيانى للدالة د حيث د (س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} & \text{عندما س} < ٠ \\ |\text{س}| & \text{عندما س} \geqslant ٠ \end{cases}$

ومن الرسم أوجد: المدى وابحث الاطراد وعين نوع الدالة من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

② إذا كانت د(س) = س^{٢} |س| فعين نوع الدالة د من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك ثم أوجد مجموعة حل المعادلة د(س) = ١.

الاختبار السادس — تفاضل وحساب مثلثات

اجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: **أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:**

① فى △ أ ب جـ إذا كان أَ = بَ = ٨سم ، محيط △ أ ب جـ = ٢٦ سم فإن: ق(∠ جـ) ≃

أ ٣٥,٣° — ب ٥٢,٣° — جـ ٧٧,٤° — د ١٠٨°

② $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} - ١} =$

أ صفر — ب ١ — جـ ٢ — د ٣

③ فى △ أ ب جـ : إذا كان ق(∠ أ) = ٣٠° ، أَ = ٦سم فإن $\dfrac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} =$ ……

أ ٣ — ب ٦ — جـ $\frac{١}{٥}$ — د ١٢

④ $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}^{٥} - ١}{\text{س} - ١} =$

أ ٥ — ب ١ — جـ ٤ — د ٢٠

السؤال الثاني:

① **أوجد كلا من :**

أ $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهــا}} \dfrac{٥\,\text{س}^{٤} + ٣\text{س}^{٢} - ٦}{٢\,\text{س} + \text{س}^{٤}}$ — ب $\underset{\text{س} \leftarrow -٢}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س} + ٢}{\text{س} - ٣}$

② △ أ ب جـ فيه: $\frac{١}{٢}$ جا أ = $\frac{١}{٣}$ جا ب = $\frac{١}{٤}$ جا جـ أوجد قياس اكبر زواياه

السؤال الثالث:

① **أوجد قيمة كلاً من:**

أ $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهــا}} \dfrac{٤ - ٣\text{س}^{٢}}{\sqrt{\text{س}^{٤} + ٥}}$ — ب $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt{\text{س} + ١} - ٢}{\text{س} - ٣}$

② أوجد محيط △ أ ب جـ الذى فيه: $\text{أ}' = ٨$سم ، $\text{ب}' = ٦$سم ، ق$(\angle \text{جـ}) = ٤٨°$

السؤال الرابع:

① أوجد كلاً من :

أ $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٩}{\text{س} - ٣}$　　ب $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{٢\text{س}^٢ - ٨}{\text{س} - ٢}$

② أوجد طول قطر الدائرة المارة برؤوس △أ ب جـ في الحالتين الآتيتين:

أ ق$(\angle \hat{\text{أ}}) = ٧٥°$ ، $\text{أ}' = ٢١$ سم

ب ق$(\angle \hat{\text{ب}}) = ٥٠°$ ، ق$(\angle \hat{\text{جـ}}) = ٦٥°$ ، $\text{جـ}' - \text{ب}' = ٦$سم

الاختبار السابع　تفاضل وحساب مثلثات

اجب عن الاسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

① فى أى مثلث ل م ن يكون $\frac{\text{ل}'}{\text{جا ل}}$ مساويًا:

أ $\frac{\text{م}'}{\text{جا ن}}$　ب $\frac{\text{ن}'}{\text{جا م}}$　جـ $\frac{\text{م}' + \text{ن}'}{\text{جا ن} + \text{جا م}}$　د ٣ سع

② $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt{٤\text{س}^٢ + ١}}{\text{س} - ٢} =$

أ ٤　ب ٥　جـ $\frac{٥}{-٢}$　د ٢

③ $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} (٢\text{س}^٢ + ٣) =$

أ ٢　ب ٣　جـ ٥　د ٧

④ فى △أ ب جـ إذا كان ٢ جا أ = ٣ جا ب = ٤ جا جـ فإن $\text{أ}' : \text{ب}' : \text{جـ}'$ يساوى

أ ٢ : ٣ : ٤　ب ٤ : ٣ : ٢　جـ ٣ : ٤ : ٦　د ٦ : ٤ : ٣

السؤال الثاني:

① أوجد قيمة كلاً من:

أ $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^٥ - ٣٢}{\text{س} - ٢}$　　ب $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \frac{(\text{س} - ٢)^٤ - ١}{\text{س} - ١}$

② أ ب جـ ى متوازى الأضلاع فيه أب = ٧سم ، القطران $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب ى}}$ يصنعان مع $\overline{\text{أ ب}}$ زاويتين قياسيهما ٦٥°، ٢٨° على الترتيب أوجد طول كل من $\overline{\text{ب ى}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$.

السؤال الثالث:

① أوجد كلاً من:

أ $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}^{٣} - ٢٧}{\text{س}^{٢} - ٩}$

ب $\underset{\text{س}\to \infty}{\text{نهــا}} \dfrac{٤\text{س}^{٢} + ١}{\text{س}^{٢} - ٢}$

② أ ب جـ ى شكل رباعي فيه أ ب = ٩ سم، ب جـ = ٥سم، جـ ى = ٨ سم، ى = أ = ٩سم، أ جـ = ١١سم، فأثبت أن الشكل أ ب جـ ى رباعي دائري.

السؤال الرابع:

① أوجد قيمة كلا من :

أ $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}^{٢} + ٥\text{س} - ٦}{\text{س}^{٢} - ١}$

ب $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهــا}} \dfrac{(\text{س}+١)^{٥} - ٣٢}{\text{س} - ١}$

② أ ب جـ مثلث فيه حتا أ = $\frac{٢}{٥}$ ، ب$'$ = $٢\frac{١}{٢}$ ، جـ$'$ = ٢سم ، أثبت أن المثلث متساوي الساقين.

الاختبار الثامن تفاضل وحساب مثلثات

اجب عن الاسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① فى △ أ ب جـ إذا كان أ$'$ = ٧سم فإن ب$'$ =

أ $\dfrac{٧\text{جا أ}}{\text{جا ب}}$ ب $\dfrac{٧\text{جا ب}}{\text{جا أ}}$ جـ $\dfrac{\text{جا أ}}{٧\text{جا ب}}$ د $\dfrac{\text{جا جـ}}{٧\text{جا ب}}$

② $\underset{\text{س}\to \infty}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}^{٢}}}{\text{س}}$ =

أ صفر ب ١ جـ ٢ د ١-

③ $\underset{\text{س}\to \infty}{\text{نهــا}} \dfrac{٢ + \text{س}}{\text{س}}$ =

أ ٢ ب صفر جـ ٣ د ١

④ فى △ أ ب حـ إذا كان $\dfrac{\text{جا أ}}{\text{أ}'}$ = $\dfrac{\text{جا ب}}{\text{ب}'}$ فإن $\dfrac{\text{٢ جا أ- جا ب}}{\text{..................}}$ = $\dfrac{\text{جا أ}}{\text{أ}'}$

أ أ$'$ + ب$'$ ب ٢أ$'$ + ب$'$ جـ أ$'$ - ٢ ب$'$ د ٢أ$'$ - ب$'$

السؤال الثاني:

① **أ** إذا كان $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{أ}}{\text{س}+١} = ٤$ فأوجد قيمة أ **ب** أوجد $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س}+٤}-٢}{\text{س}}$

② حل المثلث أب جـ الذى فيه أ' = ٢ ، ب' = ١٢سم، جـ' = ٨سم

السؤال الثالث:

① **أ** $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢}+٣\text{س}}{\text{س}+١}$ **ب** $\underset{\text{س}\to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{٣}{\text{س}}+\frac{٢\text{س}^{٥}+١}{\text{س}^{٢}(\text{س}^{٣}+٢)}\right)$

② أ ب حـ مثلث فيه ق(∠ أ) = ٣٧' ٢٢° ، ق(∠ ب) = ٢٣' ٦٧° ومحيطه ٣٠سم، أوجد كلا من أ'، ب' لأقرب سم

السؤال الرابع:

① أوجد قيمة

أ $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٣}-٢\text{س}+١}{\text{س}^{٢}-١}$ **ب** $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \left(\frac{١}{\text{س}}+٣\right)$

② أ ب جـ مثلث فيه ق(∠ب) = ٣٥° ، ق(∠ جـ) = ٧٠° وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ١٦سم أحسب مساحة ومحيط المثلث أب جـ لأقرب عدد صحيح.

الاختبار التاسع تفاضل وحساب مثلثات

اجب عن الاسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاه.

① فى أى مثلث أ ب جـ يكون حتا أ =

أ -(جتا ب + جتا جـ) **ب** جتا ب − جتا جـ
جـ جتا (ب + جـ) **د** - جتا (ب+جـ)

② $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \left(\frac{٣}{٤}\right) =$

أ ٣ **ب** ٤ **جـ** $\frac{٣}{٤}$ **د** ١

③ $\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}} \frac{٣\text{س}^{٢}-١٢}{\text{س}+٢} =$

أ ١٨ **ب** -٣ **جـ** ١٢ **د** -١٢

④ فى ∆ أ ب جـ يكون المقدار $\frac{أ^{/٢}+ب^{/٢}-جـ^{/٢}}{٢ أ^{/} ب^{/}}$ مساويا الصفر إذا كان:

أ ق(∠ أ) = ٦٠°

ب ق(∠ب) = ٩٠°

جـ ق(∠جـ) = ١٢٠°

د ق(∠أ) + ق(∠ ب) = ٩٠

السؤال الثاني:

① أ ب جـ ء متوازى الأضلاع فيه أجـ = ١٠سم ، بء = ٨سم فإذا تقاطع $\overline{أ جـ}$ ، $\overline{ب ء}$ فى م وكانت ق(∠ أم ب) = ٧٠°
أوجد محيط متوازى الأضلاع.

② **أوجد كل من النهايات الآتية:**

أ $\lim\limits_{س \to \infty} س \left(\sqrt{٤س^{٢}+١} - ٢س\right)$

ب $\lim\limits_{س \to -١} \frac{س^{٢}+٣س+٢}{س+١}$

السؤال الثالث:

① **أوجد قيمة كلاً من:**

أ $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^{٥}-٣٢}{س^{٢}-٤}$

ب $\lim\limits_{س \to ١} \frac{٣س+٧}{س^{٢}+٢س-٥}$

② أوجد قياس أصغر زاوية فى المثلث أب جـ إذا كان أ/ = ٢٥سم ، ب/ = ٢٠سم، جـ/ = ٢٨سم

السؤال الرابع:

① **أوجد قيمة مايأتى :**

أ $\lim\limits_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{س^{٣}-\frac{١}{٨}}{س^{٢}-\frac{١}{٤}}$

ب $\lim\limits_{س \to \infty} \sqrt{\frac{١-س}{١-٤س}}$

② ∆أ ب جـ فيه ق(∠ أ)= ٣٦ °، ق(∠جـ) = ٤٥°، ب/ = ٩سم أوجد جـ / ثم أوجد مساحة الدائرة المارة برؤوسة.

الاختبار العاشر

تفاضل وحساب مثلثات

اجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة:

① فى أى مثلث س ص ع يكون المقدار $\frac{س^{/٢}+ص^{/٢}-ع^{/٢}}{٢ س^{/} ص^{/}}$ مساويًا:

أ جتا س　　**ب** جا ص　　**ج** جتا ع　　**د** جا ع

② إذا كانت $\angle$ أ تكمل $\angle$ جـ فإن حتا أ + حتا جـ =

أ صفر　　**ب** ١　　**ج** -١　　**د** $\frac{١}{٢}$

③ $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـا}} (٣\text{س}^٢) =$

أ ٢　　**ب** ٣　　**ج** ٤　　**د** ٥

④ $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{١}{|\text{س}|} =$

أ ١　　**ب** -١　　**ج** $\frac{١}{٢}$　　**د** $-\frac{١}{٢}$

السؤال الثاني:

① أوجد قياس أصغر زوايا المثلث س ص ع إذا كان س$'$ = ٢٧سم ، ص$'$= ٣٥سم، ع$'$ = ١٨سم

② **أوجد قيمة كل من:**

أ $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢}{\text{س}^٣ - ١}$　　**ب** $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}+١)(٥\text{س} - ٣)}{\text{س}^٢ + ٣}$

السؤال الثالث:

① أوجد قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٧ سم ، ٨ سم، ٩ سم

② **أوجد قيمة كل من :**

أ $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}-٦)^٢ - ٩}{\text{س}^٢ - ٩}$　　**ب** $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س}^٣ - \text{س}^٢ - ٢\text{س} + ١}{\text{س}^٣ + ١}$

السؤال الرابع:

① حل المثلث أ ب جـ الذى فيه ق($\angle$أ) = ق($\angle$ب) ، ق($\angle$جـ) = ٨٠° ، جـ$'$ = ١٥سم

② **أوجد قيمة كلا من :**

أ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٩\text{س}+٤} - ٢}{\text{س}}$　　**ب** $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\frac{٣}{٢}} - \text{س}^{\frac{١}{٢}}}{\text{س}^٢ - \text{س}}$

إجابات بعض التمارين

الوحدة الأول: الدوال ذات المتغير الحقيقى ورسم المنحنيات

إجابة بعض تمارين (١ - ١)

① العلاقة التى تمثل دالة هى (د)

⑥ أ ح ،]-∞ ، ٤] ب ح ،]-٢، ∞[
جـ ح - {٠} ، ح - {٠} د]-∞ ، ٤[-{٢}]-∞ ، -٨[

⑦ مدى الدالة =] ١، ٣[∪ {-١}

إجابة بعض تمارين (١ - ٢)

②

الشكل	المجال	المدي	الإطراد
أ	ح	]-∞، ٢]	]-∞، ٠[تزايدية ،]٠، ∞[ثابتة
ب	ح	[-٤، ∞[	]-∞، ٠[تناقصية ،]٠، ∞[تزايدية
جـ	]-∞، ٦]	]-∞، ٢]	]-∞، -٤[تزايدية ،]-٤، ٤[ثابتة، تناقصية]٤، ٦]
د	ح - {١}	ح - {-٢}	]-∞، ١[تناقصية ،]١، ∞[تناقصية
هـ	ح - {-١}	[-٢، ∞[	]-∞، -١[تناقصية ،]-١، ∞[ثابتة
و	ح - {٢، ٠}	]٠، ∞[	]-∞ ، ٢[تزايدية ،]٢، ∞[تناقصية

إجابة بعض تمارين (١ - ٣)

② دوال زوجية جـ، د: أدوال فردية : ب ، هـ ، و
دوال ليست زوجية وليست فردية : د ، هـ

③ دوال زوجية : أ دوال فردية : ب ، جـ
دوال ليست زوجية وليست فردية : د، هـ

④ دوال زوجية جـ دوال فردية أ، د
دوال ليست زوجية وليست فردية : ب

إجابة بعض تمارين (١ - ٤)

①

م	المدي	الإطراد
أ	[٠، ∞[	تناقصية فى]-∞، ٠[، تزايدية فى]٠ ، ∞[
ب	[٠، ∞[	ثابتة فى]-∞، -٢[، تناقصية]-٢، ٠[، تزايدية]٠، ∞[
ج	]-∞، ١]	تزايدية فى]-∞، ١[، ثابتة فى]١، ∞[
د	ح - {٠}	تناقصية فى]-∞، ٠[، تزايدية فى]٠، ∞[

② جـ ③ ب ④ أ ⑤ ب
⑥ جـ
⑦ ر : (س - ٤)^{٢} ، ق : س^{٢} - ٢، ع : (س + ٤)^{٢} - ٣
⑧ ر : (س - ٣)^{٣} ، ق : س^{٣} - ٤ ، ع: (س + ٤)^{٢} - ١
⑨ ر : |س - ٣| ، ق: |س| - ٢ ، ع : |س + ٣| + ٢

إجابة بعض تمارين (١ - ٥)

① {- $\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٢}$} ② ϕ
③ {٢} ④ جـ
⑤ أ ⑥ ب
⑦ و ⑧ د
⑨ هـ ⑩ {-٩، ٣}
⑪ {١، ٦} ⑫ {-٢، ٥}
⑬ {١} ⑭ {-٤، ١}
⑮ {-٣، ٥} ⑯ {-١، -٧}
⑰ {-١ ⑱ {١، ٤}
⑲]-٢، ٤[⑳ [-٣، ٧]
㉑ ح - [-٥، -١] ㉒ ح - [-١، ٢]
㉓ [-٥، ٢] ㉔ ح]$\frac{٥}{٣}$، ٣[
㉕ |س -٤| < ٣ أى أن س =] ١ ، ٧[
㉖ |س – ٣٨,٥| < ٣,٥

الوحدة الثانية: الاسس واللوغاريتمات

اجابة بعض تمارين (٢ - ١)

① أ س$^{\frac{١}{٣}}$ ب أ$^{\frac{٣}{٤}}$ جـ ٢ ن$^{\frac{١}{٣}}$
د أ$^{\frac{١}{٢}}$ب$^{\frac{٣}{٤}}$ هـ س$^{\frac{٥}{٦}}$ و س$^{-\frac{١}{١٥}}$

اجابة بعض تمارين (٢ - ٢)

① جميع الدوال الأسية الغير محددة المجال مجالها هو ح.
مدى الدوال المحددة بالسؤال هو]٠، ∞[
الدوال : (أ) ، (ب) متزايدة
الدوال : (جـ)، (د) متناقصة

② أ (٠، ١) ب (٠، ٢)
جـ أ = ٣ د محور الصادات
هـ]٠، ١[و أ < $\frac{١}{٢}$

③ أ جـ = ٤٣٢٦٥٣٤١ (١+٠,٠١٥)^{ن}
ب جـ = ٥٨٢٧٢١٤١ نسمة

④ أ جـ = ١٠^{٦} (١ + ٠,٠٦)^{ن}
ب جـ = ١٠^{٦} (١ + ٠,٠٦)^{١٠}
جـ ≃ ١٧٩٠٨٤٨ جنيهًا

اجابة بعض تمارين (٢ - ٣)

① أ ٣ ب ٢ جـ ١ د ±٥ هـ ١
② ب ③ د ④ جـ ⑤ ب
⑥ د ⑦ ب

اجابة بعض تمارين (٢ - ٤)

② أ {١٠} ب {١٢٣} جـ {٢٧}
د {١٥} هـ {٢} و {٣}

③ أ صفر ب ١ جـ ٢
د ١

⑤ أ ١,١٧٦ ب ٤,٧٥٥ جـ -٢,١٨٩

اجابة بعض تمارين (٢ - ٥)

① ب ② أ
③ جـ ④ أ
⑤ جـ ⑥ أ

اجابة بعض التمارين عامة

①
أ ± ٢ ب ٢ جـ $\frac{١}{٢}$
د ٣ هـ]٠، ١ [و ص = لو$_{٢}$ س
ز ص = ($\frac{١}{٣}$)^{س} ح ١ ط (٠، ٢)
ى ١ ك ١ ل ١

②
أ ٣ ب ٠,١ جـ ٢
د ٤ هـ ١ و ٣

③
أ {(٢٧، -٢٧)} ب {(-٢)} جـ {(٣)}
د {٢٥} هـ {$\frac{-٧}{٣}$} و {٠,٢٦}

اجابة اختبار تراكمى

① أ [٢، ∞ [ب ح - (٠)
جـ [٢، ∞ [

③ أ ١

④ أ ٢ ب $\frac{١}{٩}$
جـ ١ د صفر
هـ -$\frac{٣}{٢}$ و ٥

مكتبة مستشار الرياضيات في مصر

الوحدة الثالثة: النهايات

اجابة بعض تمارين (٣ - ١)

① من الرسم البيانى نجد أن

أ $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا}$ د(س) = ١

ب د(٠) = ١

② من الرسم نجد أن:

أ $\underset{س \leftarrow ٣^+}{نهـا}$ د(س) ليس لها وجود .

ب د(٣) = ١

اجابة بعض تمارين (٣ - ٢)

① ١٠ ② صفر ③ -١

④ ٤ ⑤ أ٥ ⑥ ١٢

⑦ ٣ ⑧ ٣٢ ⑩ ٣٢

⑪ $\frac{٣}{٢}$ ⑫ ٧ ⑬ ليس للدالة نهاية.

⑭ -١ ⑮ ٨

⑱ $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا}$ (س^٢ - ٣س + ٢)

= (٣)^٢ - ٣(٣) + ٢

= ٢

اجابة بعض تمارين (٣ - ٣)

① ١ ② -٢

③ -٧ ④ ∞

⑤ ٢ ⑥ ∞

⑦ ∞ ⑧ ٣

⑨ ٣ ⑩ صفر

⑪ ٣ ⑫ ١

⑬ صفر ⑭ ∞

اجابة بعض التمارين عامة

④ ١ ⑤ ∞

⑥ صفر

⑦ $\underset{س \leftarrow -٢}{نهـا} \frac{س + ٧}{س + ٢}$ غير معرفة

⑨ $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \frac{س^٣ - ٣^٣}{س - ٣}$ = ٣(٣)^٢ = ٢٧

⑩ $\underset{س \leftarrow ٨}{نهـا} \frac{س^٢ - ٦س - ١٦}{س - ٨}$ = $\underset{س \leftarrow ٨}{نهـا} \frac{(س-٨)(س+٢)}{(س-٨)}$

= $\underset{س \leftarrow ٨}{نهـا}$ (س + ٢) = ١٠

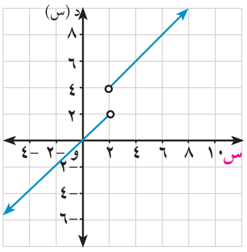
⑪ $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{س^٧ - ١٢٨}{س^٣ - ٨}$ = $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{س^٧ - ٢^٧}{س^٣ - ٢^٣}$

= $\frac{٧}{٣}$ × (٢)$^{٧-٣}$ = $\frac{٧}{٣}$ × ٢^٤

= $\frac{١١٢}{٣}$

اجابة اختبار تراكمى

⑧



من الشكل نلاحظ أن

د(٢$^-$) = ٢ ، د(٢$^+$) = ٤

∴ د(٢$^-$) ≠ د(٢$^+$)

$\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}$ د(س) ليس لها وجود .

⑪

أ $\underset{س \leftarrow \infty}{نهـا} \frac{٧س}{٢س + ٥}$ = $\underset{س \leftarrow \infty}{نهـا} \frac{٧}{٢ + \frac{٥}{س}}$ = $\frac{٧}{٢}$

ب $\underset{س \leftarrow \infty}{نهـا} \frac{٤س^٢}{٣ - س}$ = $\underset{س \leftarrow \infty}{نهـا} \frac{٤س}{\frac{٣}{س} - ١}$ = ∞

ج $\underset{س \leftarrow \infty}{نهـا} \frac{|س|}{س}$ = $\underset{س \leftarrow \infty}{نهـا} \frac{س}{س}$ = ١

الوحدة الرابعة: حساب المثلثات

اجابة بعض تمارين (٤ - ١)

② ٢٠ سم ③ ١١,٣

④ ٤ ⑤ ٣٠°

⑥ ٩ $\sqrt{٣}$ سم^٢ ⑦ أ

⑧ أ ⑨ أ

⑩ ب ⑪ جـ

⑫ ى

⑬ أ ≃ ٧,٤سم ب ≃ ٩,٢سم

⑭ ق(∠جـ) = ٧١° ، ب$^/$ ≃ ٥,٩سم ، جـ$^/$ ≃ ٩,٩٨سم

⑮ ق(∠ب) ≃ ٥٦° ، أ$^/$ ≃ ٣,٧٤١سم ، ب$^/$ ≃ ٩,٥٢٧سم

⑯ ق(∠ب) ≃ ٤٦° ، ب$^/$ ≃ ١٣,٦١سم ، جـ$^/$ ≃ ٥,٨٤٥سم

اجابة بعض تمارين (٤ - ٢)

① -٢ ص$^/$ ع$^/$ جتا س ، $\frac{ص^{/٢} + ع^{/٢} - س^{/٢}}{٢ ص^/ ع^/}$

② ٢٣$^/$ ٧٤°

③ ٤٤$^/$ ٣٣° ④ ٢ $\sqrt{١٩}$سم

⑤ ٢ م$^/$ ن$^/$ جتا ل ⑥ ١٢٠°

⑦ جتا ن ⑳ ≃ ١١,٤٩سم

㉑ ≃ ١٧,٧١سم

㉒ أ ق(∠جـ) = ٦٠°

ب مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١٥\sqrt{٣}}{٤}$

㉓ ق(∠جـ) = ١٢٠°

إجابة بعض التمارين العامة

① جيوب الزوايا المقابلة لها

② أطوال أضلاعه أو طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

③ أكبر الزوايا قياسًا.

⑧ ٢ ⑨ ٢

⑩ ٤ ⑪ ٢

الاختبار التراكمى

① ب ② جـ

③ أ ④ د

⑤ أ ⑥ أ

⑪ ١٠ $\sqrt{٢}$ سم

⑫ جـ ≃ ١٥$^{//}$ ١$^/$ ٨٤° ، المساحة ٩,٩٥سم^٢

الاختبارات العامة

الاختبار الأول

السؤال الأول

① ب ② ب

③ جـ ④ جـ

السؤال الثانى :

① المجال = ع - {٠} ، (صفر ، صفر) ، مجموعة الحل = {١}

② المدى [-٢، ٢٥] ، تناقصية فى الفترة]-٥، ٠[، تزايدية فى الفترة]٠، ٢[، تناقصية فى الفترة]٢، ٨[

السؤال الثالث :

① المدى = [٠، ∞[، تناقصية فى] -∞، ٣[وتزايدية فى الفترة]٣، ∞[، ليست زوجية وليست فردية.

② أ مجموعة الحل = ع -]-٥، ∞[ب -٣

السؤال الرابع :

① أ ٣٠

ب مجموعة الحل = {١}

② أ $\frac{١}{٨}$ ب ١

الاختبار الثانى :

السؤال الأول :

① أ   ② جـ
③ ب   ④ أ

السؤال الثالث :

① أ {١}   ب {٢}
② أ {١}

السؤال الرابع

①]-١، ١[
② المجال = ح - {٠}، المدى = ح - {-١}
تناقصية فى الفترة] -∞، ٠[، تناقصية فى الفترة]
٠،∞ [ليست زوجية وليست فردية.

الاختبار الثالث :

السؤال الأول:

① د   ② جـ
③ ب   ④ أ

السؤال الثانى :

② أ]-٢، ٨[ب {-١}

السؤال الثالث :

① ب $\frac{١}{٣}$

السؤال الرابع :

② أ فردية
ب ليست زوجية وليست فردية

الاختبار الرابع:

السؤال الثانى :

② أ {٥، -٣}   ب]$\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٢}$ ٥[

السؤال الثالث :

① أ ٨   ب $\frac{١}{٨}$

السؤال الرابع :

① {٠، ١}، ليست زوجية وليست فردية
② أ {٧,١٢٩}   ب {١}

الأختبار الخامس :

السؤال الأول :

① أ   ② ب
③ د   ④ أ

السؤال الثالث :

① أ {٤}   ب {-٢}
② أ {٢}   ب {١}

السؤال الرابع:

② زوجية ، {١، -١}
أدبى ترم أول / تفاضل ومثلثات

الأختبار السادس :

السؤال الثانى :

① أ ٥   ب صفر
② ٢٩/ ١٠٤°

السؤال الثالث :

① أ -٣   ب $\frac{١}{٤}$
② المحيط ≃ ٢٠ سم

السؤال الرابع :

① أ صفر   ب ٨

الاختبار السابع :

السؤال الأول

① جـ   ② د
③ ب   ④ د

السؤال الثانى :

① أ ٨٠   ب ٤
② ١٢,٧سم ، ٦,٦ سم

السؤال الرابع:

① أ $\frac{٧}{٢}$ ب ٨٠

الاختبار الثامن :

السؤال الأول :

① ب   ② ب
③ د   ④ د

السؤال الثانى :

① أ ١٢   ب $\frac{١}{٤}$

السؤال الثالث:

① أ ٢   ب ٢
② ٥سم ، ١٢سم

السؤال الرابع

① أ $\frac{١}{٢}$ ب ٤

الاختبار التاسع:

السؤال الأول :

① د   ② جـ
③ د   ④ د

السؤال الثانى

① ٢٥,٢٤ متر
② أ $\frac{١}{٤}$ ب ١

السؤال الثالث :

① أ ٢٠   ب -٥
② ق(ث)≃ ٥٣/ ٤٣°

السؤال الرابع :

① أ $\frac{٣}{٤}$ ب $\frac{١}{٢}$
② ٦,٤ سم ، المساحة = ٦٥,٢سم^{٢}

الاختبار العاشر :

السؤال الأول :

① جـ   ② أ
③ ب   ④ جـ

السؤال الثانى :

① ٢٤/ ٣٠°
② أ $\frac{-١}{٣}$ ب ٥

السؤال الثالث :

② أ -١   ب ٢

السؤال الرابع :

① أ/ = ب/ = ١١,٦٧سم
② أ $\frac{٩}{٤}$ ب ١